Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
РЫБОХОЗЯЙСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**А.Е. Ковтанюк**

# КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Владивосток
Дальнаука
1999

УДК 517

Контрольные работы по уравнениям математической физики. Препринт.
Ковтанюк А.Е., ИПМ ДВО РАН, Издательство "Дальнаука", Владивосток, 1999.

Сборник содержит свыше 200 задач по курсу уравнений математической физики, читаемому студентам математического, механического, физического и технического профилей. Первый раздел содержит задачи на приведение уравнений в частных производных к каноническому виду. Основное внимание в сборнике (раздел 2 – 5) уделено методу Фурье для различных типов уравнений (одномерное волновое уравнение, одномерное уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа в кольце и прямоугольнике).

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Д.С.Аниконов

## Тема 1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Приведение к каноническому виду

Рассмотрим функцию $u(x,y)$ двух независимых переменных $x$, $y$. Уравнение

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0 \tag{1}$$

принадлежит *гиперболическому типу*, если $b^2 - ac > 0$, *параболическому типу*, если $b^2 - ac = 0$, и *эллиптическому типу*, если $b^2 - ac < 0$. Здесь $a$, $b$ и $c$ – функции от $x$, $y$, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно.

Чтобы привести уравнение (1) к каноническому виду, нужно составить уравнение характеристик

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0, \tag{2}$$

которое распадается на два уравнения

$$ady - (b + \sqrt{b^2 - ac})dx = 0, \tag{3}$$

$$ady - (b - \sqrt{b^2 - ac})dx = 0, \tag{4}$$

и найти их общие интегралы.

**Уравнения гиперболического типа: $b^2 - ac > 0$.**

Общие интегралы $\varphi(x,y) = c_1$, $\psi(x,y) = c_2$ уравнений (3) и (4) будут вещественными и различными. Они определяют два различных семейства вещественных характеристик.

Вводя вместо $(x,y)$ новые независимые переменные $(\xi,\eta)$, такие что

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

приведем уравнение (1) к каноническому виду

$$v_{\xi\eta} = \Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta), \tag{5}$$

где $v(\xi,\eta) = u(x,y)$. Это – так называемая каноническая форма уравнения гиперболического типа. Часто пользуются второй канонической формой. Положим

$$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi-\eta}{2}.$$

Переходя в уравнении (1) к новым независимым переменным $(\alpha,\beta)$, в результате получим

$$v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha,\beta,v,v_\alpha,v_\beta). \tag{5$'$}$$

**Уравнения параболического типа: $b^2 - ac = 0$.**

В этом случае уравнения (3) и (4) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (2): $\varphi(x,y) = c$. Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

где $\psi(x,y)$ – любая функция, не зависимая от $\varphi(x,y)$. Достаточным условием независимости функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ является отличие от нуля соответствующего функционального определителя $\Delta = \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x$.

Вводя вместо $(x, y)$ новые независимые переменные $(\xi, \eta)$, приведем уравнение (1) к виду

$$v_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta). \tag{6}$$

Это – каноническая форма для уравнения параболического типа.

**Уравнения эллиптического типа: $b^2 - ac < 0$.**

В этом случае общие интегралы уравнений (3) и (4) – комплексно сопряженные; они определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть общий интеграл уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = c,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – вещественные функции.

Тогда полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

приводим уравнение (1) к виду

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta). \tag{7}$$

Это – каноническая форма для уравнения эллиптического типа.

**Контрольные задания по теме:**

Определить тип уравнений. Привести к каноническому виду.

1. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - x^2 y = 0.$
2. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u_y = 0.$
3. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y = 0.$
4. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y = 0.$
5. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$
6. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y + x - 2y = 0.$
7. $u_{xx} + 2u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0.$
8. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y + 9(x + y) = 0.$
9. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y = 0.$
10. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$
11. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + x = 0.$
12. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y = 0.$
13. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y = 0.$
14. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y = 0.$

15. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = 0.$

16. $u_{xx} + u_{xy} - u_y + 4x = 0.$

17. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y + y = 0.$

18. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 0.$

19. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y = 0.$

20. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y = 0.$

21. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} - u_x + u_y + 2x = 0.$

22. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0.$

23. $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + 2y = 0.$

24. $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + 2x + y = 0.$

25. $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y - 4e^x = 0.$

26. $u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y + x = 0.$

27. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_x + 4e^y = 0.$

28. $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0.$

29. $(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0.$

30. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$

31. $u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0.$

32. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$

33. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} - 2yu_x = 0.$

34. $u_{xx} - 2sinx \cdot u_{xy} - cox^2x \cdot u_{yy} - cosx \cdot u_y = 0.$

35. $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0.$

36. $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0.$

37. $u_{xx} + 2sinx \cdot u_{xy} - (cos^2x - sin^2x)u_{yy} + cosx \cdot u_y = 0.$

38. $u_{xx} - 2cosx \cdot u_{xy} - (3 + sin^2x)u_{yy} + u_x + (sinx - cosx - 2)u_y = 0.$

39. $e^{-2x}u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} - e^{-2x}u_x + e^{-2y}u_y + 8e^y = 0.$

40. $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0.$

41. $u_{xx} + 2cosx \cdot u_{xy} - sin^2x \cdot u_{yy} - sinx \cdot u_y = 0.$

42. $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0$.

43. $u_{xx} - 2sinx \cdot u_{xy} - (3 + cos^2 x)u_{yy} - cosx \cdot u_y = 0$.

44. $tg^2 x u_{xx} - 2ytgx u_{xy} + y^2 u_{yy} + tg^3 x u_x = 0$.

45. $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2x u_x + 4y u_y + 16x^2 u = 0$.

46. $x u_{xx} + 2x u_{xy} + (x - 1)u_{yy} = 0$,

а) в области гиперболичности, б) в области эллиптичности.

47. $x u_{xx} + y u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$,

а) в области гиперболичности, б) в области эллиптичности.

48. $u_{xx} + xy u_{yy} = 0$,

а) в области гиперболичности, б) в области эллиптичности.

49. $y u_{xx} + u_{yy} = 0$,

а) в области гиперболичности, б) в области эллиптичности.

50. $u_{xx} + y u_{yy} + 2u_y = 0$,

а) в области гиперболичности, б) в области эллиптичности.

51. $y u_{xx} + x u_{yy} = 0$,

а) в области гиперболичности, б) в области эллиптичности.

52. $(1 - x^2)u_{xx} - 2xy u_{xy} + (1 - y^2)u_{yy} - 2x u_x - 2y u_y = 0$,

а) в области гиперболичности, б) в области параболичности,

в) в области эллиптичности.

53. $(1 - x^2)u_{xx} - 2xy u_{xy} - (1 + y^2)u_{yy} - 2x u_x - 2y u_y = 0$,

а) в области гиперболичности, б) в области параболичности,

в) в области эллиптичности.

## Тема 2. Метод разделения переменных для одномерного волнового уравнения

Пусть требуется найти решение уравнения

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \tag{1}$$

для $x \in (0, l)$, $t > 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$ku(0, t) + (1 - k)u_x(0, t) = 0, \quad ju(l, t) + (1 - j)u_x(l, t) = 0, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{3}$$

где величина $k$ принимает значение равное либо 0, либо 1, и величина $j$ принимает значение равное либо 0, либо 1.

Находим сначала нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), в виде произведения

$$u(x,t) = T(t)X(x). \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(x)}{a^2T(x)} = -\lambda,$$

где $\lambda$ – некоторая постоянная.

Отсюда

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{5}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{6}$$

Так как функция $T(t)$ не равна тождественно нулю, то, для того чтобы функция (4) удовлетворяла краевым условиям (2), необходимо и достаточно выполнение условий

$$kX(0) + (1-k)X'(0) = 0, \quad jX(l) + (1-j)X'(l) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы пришли к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения (задача Штурма - Лиувилля):

*Найти такие значения $\lambda$, называемые собственными значениями, при которых существует нетривиальное решение уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям (7); а также найти эти нетривиальные решения, называемые собственными функциями.*

Известно, что:

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ , которым соответствуют собственные функции $X_1(x)$, $X_2(x), \ldots$

2. Собственные значения $\lambda_n$ неотрицательны.

3. Собственные функции образуют на отрезке $(0,l)$ ортогональную систему.

После того, как задача Штурма - Лиувилля решена, для каждого собственного значения $\lambda_n$ решаем уравнение (6). Общее решение уравнения (6) при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n(t) = A_n cos a\sqrt{\lambda_n}t + B_n sin a\sqrt{\lambda_n}t,$$

где $A_n$, $B_n$ – произвольные постоянные.

Таким образом, мы получили бесчисленное множество решений уравнения (1) вида

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t).$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3), составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t).$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по $x$ и $t$, то сумма его будет удовлетворять уравнению (1) и краевым условиям (2).

Для выполнения начальных условий (3) требуется чтобы

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x)=\varphi(x), \tag{8}$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a\sqrt{\lambda}B_nX_n(x)=\psi(x). \tag{9}$$

Ряды (8), (9) представляют собой разложение в ряды Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Из формул для коэффициентов этих разложений и определяются коэффициенты $A_n$, $B_n$.

**Контрольные задания по теме:**

**Задание 1.** Используя метод разделения переменных, найти решение однородного волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$ при следующих граничных и начальных условиях:

1. $u(0,t)=u(l,t)=0$,
   $u(x,0)=sin\frac{\pi}{l}x+sin\frac{3\pi}{l}x$, $u_t(x,0)=0$ .
2. $u_x(0,t)=u(l,t)=0$,
   $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=1$ .
3. $u(0,t)=u_x(l,t)=0$,
   $u(x,0)=sin\frac{\pi}{2l}x+sin\frac{3\pi}{2l}x$, $u_t(x,0)=0$ .
4. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$,
   $u(x,0)=1$, $u_t(x,0)=1$ .
5. $u(0,t)=u(l,t)=0$,
   $u(x,0)=sin\frac{2\pi}{l}x$, $u_t(x,0)=1$ .
6. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$,
   $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=1+cos\frac{\pi}{l}x+cos\frac{3\pi}{l}x$.
7. $u_x(0,t)=u(l,t)=0$,
   $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=cos\frac{\pi}{2l}x+cos\frac{5\pi}{2l}x$.
8. $u(0,t)=u_x(l,t)=0$,
   $u(x,0)=sin\frac{5\pi}{2l}x$, $u_t(x,0)=1$.
9. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$,
   $u(x,0)=U=const$, $u_t(x,0)=V=const$.
10. $u(0,t)=u(l,t)=0$,
    $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=1$.
11. $u_x(0,t)=u(l,t)=0$,
    $u(x,0)=cos\frac{3\pi}{2l}x$, $u_t(x,0)=1$.
12. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$,
    $u(x,0)=1$, $u_t(x,0)=2+cos\frac{\pi}{l}x$.

13. $u(0,t) = u(l,t) = 0$,
$u(x,0) = sin\frac{\pi}{l}x$, $u_t(x,0) = sin\frac{\pi}{l}x + sin\frac{3\pi}{l}x$.

14. $u_x(0,t) = u(l,t) = 0$,
$u(x,0) = cos\frac{\pi}{2l}x + cos\frac{3\pi}{2l}x$, $u_t(x,0) = cos\frac{3\pi}{2l}x$.

15. $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$,
$u(x,0) = sin\frac{\pi}{2l}x$, $u_t(x,0) = sin\frac{\pi}{2l}x + sin\frac{3\pi}{2l}x$.

16. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$,
$u(x,0) = 2 + cos\frac{\pi}{l}x$, $u_t(x,0) = 1 + cos\frac{2\pi}{l}x$.

17. $u(0,t) = u(l,t) = 0$,
$u(x,0) = sin\frac{2\pi}{l}x$, $u_t(x,0) = x$.

18. $u_x(0,t) = u(l,t) = 0$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = cos\frac{3\pi}{2l}x + cos\frac{5\pi}{2l}x$.

19. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$,
$u(x,0) = 1 + cos\frac{2\pi}{l}x$, $u_t(x,0) = cos\frac{\pi}{l}x + cos\frac{2\pi}{l}x$.

20. $u(0,t) = u(l,t) = 0$,
$u(x,0) = sin\frac{2\pi}{l}x + sin\frac{3\pi}{l}x$, $u_t(x,0) = sin\frac{2\pi}{l}x$.

**Задание 2.** Решить методом разделения переменных следующую задачу для неоднородного волнового уравнения:

1. $u_{tt} = a^2u_{xx} + Ax + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = U_1, u(l,t) = U_2,$
$u(x,0) = U_1(1 - l^{-1}x) + U_2l^{-1}x$, $u_t(x,0) = 0$,

а)$A = 2$, $B = 1$, $U_1 = 1$, $U_2 = 0$,
б)$A = 1$, $B = 2$, $U_1 = 0$, $U_2 = 1$,
в)$A = 1$, $B = 0$.

2. $u_{tt} = a^2u_{xx} + Ax + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = U,$
$u(x,0) = U$, $u_t(x,0) = V$,

а)$A = 2$, $B = 1$, $U = 1$, $V = 0$
б)$A = 3$, $B = 1$, $U = 2$, $V = 1$
в)$A = 1$, $B = 0$, $U = 1$, $V = 2$.

3. $u_{tt} = a^2u_{xx} + Ax + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = U$, $u_x(l,t) = 0$,
$u(x,0) = U$, $u_t(x,0) = V$,

а)$A = 2$, $B = 1$, $U = 1$, $V = 0$
б)$A = 4$, $B = 1$, $U = 2$, $V = 1$
в)$A = 1$, $B = 0$, $U = 1$, $V = 2$.

4. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ax + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,$
$u(x,0) = U,\ u_t(x,0) = V,$

а)$A = 2,\ B = 1,\ U = 1,\ V = 0$
б)$A = 1,\ B = 1,\ U = 2,\ V = 1$
в)$A = 1,\ B = 0,\ U = 1,\ V = 2.$

5. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Asinx + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = U_1,\ u(l,t) = U_2,$
$u(x,0) = U_1(1 - l^{-1}x) + U_2 l^{-1} x,\ u_t(x,0) = V,$

а)$A = 2,\ B = 1,\ U_1 = 1,\ U_2 = 0,$
б)$A = 1,\ B = 2,\ U_1 = 0,\ U_2 = 1,$
в)$A = 1,\ B = 0.$

6. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Acosx + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = U,$
$u(x,0) = U,\ u_t(x,0) = V,$

а)$A = 3,\ B = 1,\ U = 1,\ V = 0$
б)$A = 1,\ B = 2,\ U = 2,\ V = 3$
в)$A = 1,\ B = 0,\ U = 1,\ V = 2.$

7. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Asinx + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = U,\ u_x(l,t) = 0,$
$u(x,0) = U,\ u_t(x,0) = V,$

а)$A = 1,\ B = 3,\ U = 1,\ V = 0$
б)$A = 2,\ B = 1,\ U = 2,\ V = 1$
в)$A = 1,\ B = 0,\ U = 1,\ V = 2.$

8. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Acosx + B, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,$
$u(x,0) = U,\ u_t(x,0) = V,$

а)$A = 3,\ B = 1,\ U = 1,\ V = 0$
б)$A = 1,\ B = 2,\ U = 2,\ V = 3$
в)$A = 1,\ B = 0,\ U = 1,\ V = 2.$

9. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B)sint + Cx + D, \quad 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = U_1(t),\ u(l,t) = U_2(t),$
$u(x,0) = l^{-1}(U_2(0) - U_1(0))x + U_1(0),\ u_t(x,0) = V,$

а)$A = 2,\ B = 1,\ C = 4,\ D = 3,\ U_1, U_2 = const,$
б)$A = 0,\ B = 2,\ C = 2,\ D = 1,\ U_1 = sint,\ U_2 = 1,$
в)$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1,\ U_1 = sint,\ U_2 = cost,$
г)$A = 1,\ B = 0,\ C = 2,\ D = 1,\ U_1 = sint,\ U_2 = 2,$
д)$A = 0,\ B = -1,\ C = 1,\ D = 0,\ U_1 = cost,\ U_2 = lsint.$

10. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B)sint + Cx + D, \quad 0 < x < l,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\, u(l,t) = U(t),$
$u(x,0) = U(0),\, u_t(x,0) = V,$

а)$A = 2,\, B = 1,\, C = 4,\, D = 0,\, U = const,$
б)$A = 1,\, B = 0,\, C = 2,\, D = 1,\, U = sint,$
в)$A = 2,\, B = 0,\, C = 1,\, D = 0,\, U = sint + 1,$
г)$A = 4,\, B = 1,\, C = 0,\, D = 0,\, U = sin2t - 1,$
д)$A = 2,\, B = 0,\, C = 0,\, D = 1,\, U = sin2t.$

11. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B)sint + Cx + D, \quad 0 < x < l,\, t > 0,$
$u(0,t) = U(t),\, u_x(l,t) = 0,$
$u(x,0) = U(0),\, u_t(x,0) = V,$

а)$A = 2,\, B = 1,\, C = 3,\, D = 1,\, U = const,$
б)$A = 1,\, B = 1,\, C = 0,\, D = 1,\, U = 2sint,$
в)$A = 4,\, B = 0,\, C = 1,\, D = 0,\, U = 2sint + 1,$
г)$A = 3,\, B = 2,\, C = 0,\, D = 0,\, U = sin2t + 1,$
д)$A = 2,\, B = 0,\, C = 0,\, D = 1,\, U = sin2t\ .$

12. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B)sint + (Cx + D)cos2t, \quad 0 < x < l,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,$
$u(x,0) = 0,\, u_t(x,0) = V,$

а)$A = 2,\, B = 1,\, C = 0,\, D = 1,$
б)$A = 1,\, B = 2,\, C = 1,\, D = 0,$
в)$A = 1,\, B = 0,\, C = 0,\, D = 2,$
г)$A = 3,\, B = 1,\, C = 2,\, D = 1,$
д)$A = 2,\, B = 0.\, C = 1,\, D = 1.$

13. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B)cost + Csinx + D, \quad 0 < x < l,\, t > 0,$
$u(0,t) = U_1(t),\, u(l,t) = U_2(t),$
$u(x,0) = l^{-1}(U_2(0) - U_1(0))x + U_1(0),\, u_t(x,0) = 0,$

а)$A = 2,\, B = 1,\, C = 3,\, D = 0,\, U_1, U_2 = const,$
б)$A = 0,\, B = 1,\, C = 4,\, D = 1,\, U_1 = cost,\, U_2 = 2,$
в)$A = 0,\, B = 0,\, C = 0,\, D = 1,\, U_1 = sint,\, U_2 = cost,$
г)$A = 0,\, B = 0,\, C = 2,\, D = 1,\, U_1 = cost,\, U_2 = 1,$
д)$A = -1,\, B = 0,\, C = 1,\, D = 0,\, U_1 = sint,\, U_2 = lcost.$

14. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + (Ax + B)cost + Csinx + D, \quad 0 < x < l,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\, u(l,t) = U(t),$
$u(x,0) = U(0),\, u_t(x,0) = 0,$

а)$A = 2,\, B = 1,\, C = 3,\, D = 1,\, U = const,$
б)$A = 1,\, B = 0,\, C = 4,\, D = 1,\, U = cost,$
в)$A = 3,\, B = 0,\, C = 1,\, D = 0,\, U = 2cost + 1,$
г)$A = 2,\, B = 1,\, C = 0,\, D = 0,\, U = cos2t,$
д)$A = 2,\, B = 0,\, C = 1,\, D = 0,\, U = cos2t - 1.$

15. $u_{tt} = a^2u_{xx} + (Ax + B)cost + Ccosx + D, \quad 0 < x < l,\, t > 0,$
$u(0,t) = U(t)$, $u_x(l,t) = 0$,
$u(x,0) = U(0)$, $u_t(x,0) = 0$,

а)$A = 1$, $B = 1$, $C = 4$, $D = 0$, $U = const$,
б)$A = 1$, $B = 2$, $C = 2$, $D = 1$, $U = cost$,
в)$A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 0$, $U = 2cost - 1$,
г)$A = 3$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, $U = cos2t$,
д)$A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 0$, $U = cos2t - 1$.

16. $u_{tt} = a^2u_{xx} + (Ax + B)sin2t + (Cx + D)cost, \quad 0 < x < l,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = V$,

а)$A = 2$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$,
б)$A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 0$,
в)$A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 3$,
г)$A = 4$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 1$,
д)$A = 2$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 1$.

*Примечание.* В задачах 9 - 16 предполагается, что частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот струны.

*Указание 1.* В задачах 1 - 16 рекомендуется искать решение в виде суммы двух функций: $v(x,t)$ и $w(x,t)$, где $v(x,t)$ - частное решение неоднородного волнового уравнения, а $w(x,t)$ - общее решение однородного уравнения с нулевыми граничными условиями.

*Указание 2.* В задачах 1 - 8, когда вынуждающая сила не зависит от переменной $t$, частное решение неоднородного волнового уравнения удобно искать как функцию зависящую только от переменной $x$. То есть $v = v(x)$.

*Указание 3.* В задачах 9 - 16 для неоднородного дифференциального уравнения вида

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + F(x) + \Phi(x)sin\omega t$$

или

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + F(x) + \Phi(x)cos\omega t,$$

частное решение можно искать в виде суммы двух функций $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$, где $v_1(x,t)$ - частное решение неоднородного волнового уравнения

$$v_{tt} = a^2v_{xx} + F(x),$$

а $v_2(x,t)$ - частное решение неоднородного уравнения

$$v_{tt} = a^2v_{xx} + \Phi(x)sin\omega t,$$

или

$$v_{tt} = a^2v_{xx} + \Phi(x)cos\omega t.$$

Функцию $v_1$ удобно искать как функцию зависящую только от переменной $x$, а функцию $v_2$ можно искать в виде $v_2(x,t) = X(x)sin\omega t$ или $v_2(x,t) = X(x)cos\omega t$.

*Указание 4*. В задачах с ненулевыми граничными условиями часто бывает полезно предварительно представить решение $u(x,t)$ как сумму двух функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$, где функция $v(x,t)$ удовлетворяет на границе тем же условиям, что и функция $u(x,t)$. Таким образом, задача сводится к нахождению решения $w(x,t)$ некоторого волнового уравнения с нулевыми граничными условиями. Функцию $v(x,t)$ можно искать в виде $v(x,t) = A(t)x + B(t)$.

### Тема 3. Метод разделения переменных для одномерного уравнения теплопроводности

Пусть требуется найти решение одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \tag{1}$$

для $x \in (0,l)$, $t > 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$ku(0,t) + (1-k)u_x(0,t) = 0, \quad ju(l,t) + (1-j)u_x(l,t) = 0, \tag{2}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где величина $k$ принимает значение равное либо 0, либо 1, и величина $j$ принимает значение равное либо 0, либо 1.

Находим сначала нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), в виде произведения

$$u(x,t) = T(t)X(x). \tag{4}$$

Подставляя представление (4) в уравнение (1) и граничные условия (2), приходим к следующей задаче Штурма - Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$kX(0) + (1-k)X'(0) = 0, \quad jX(l) + (1-j)X'(l) = 0,$$

из которой определяется счетное число собственных значений $\lambda_n$ и собственных функций $X_n(x)$.

Функция $T(t)$ является решением следующего уравнения

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (5) при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n a^2 t},$$

где $A_n$ – произвольная постоянная.

Таким образом, имеется бесчисленное множество решений уравнения (1), удовлетворяющих граничным условиям (2), вида

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t).$$

А соответственно общее решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2), представляется в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n a^2 t} X_n(x),$$

при условии, что этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по $t$ и двукратным почленным дифференцированием по $x$.

Для выполнения начального условия (3) требуется чтобы

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi(x). \tag{6}$$

Ряд (6) представляет собой разложение в ряд Фурье функции $\varphi(x)$. А коэффициенты $A_n$ определяются как коэффициенты Фурье этого разложения.

В случае неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t)$$

решение задачи ищется в виде ряда Фурье по собственным функциям однородной задачи $(X_n(x))$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{7}$$

здесь $t$ играет роль параметра. Функцию $f(x,t)$ представим в виде ряда

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \tag{8}$$

где $f_n(t)$ при каждом фиксированном $t$ определяются как коэффициенты Фурье разложения функции $f(x,t)$ в ряд по полной ортогональной системе собственных функций $X_n(x)$, $n = 1, 2, ...$

Далее, подставляя представления (7), (8) в неоднородное уравнение и представление (7) в начальное условие (3), приходим при каждом фиксированном $n$ к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, из которой и определяется функция $u_n$.

**Контрольные задания по теме:**

Решить методом разделения переменных следующую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности :

1. $u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$
   $u(0,t) = 1,\ u(1,t) = 2,$
   $u(x,0) = x + 1.$

2. $u_t = a^2 u_{xx} + x + 2, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$
   $u_x(0,t) = 1,\ u(1,t) = 0,$
   $u(x,0) = x - 1.$

3. $u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 1,\, u_x(1,t) = 2,$
$u(x,0) = 2x + 1.$

4. $u_t = a^2 u_{xx} + x + 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 0,\, u(1,t) = 1,$
$u(x,0) = x.$

5. $u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 2,\, u(1,t) = 1,$
$u(x,0) = 2x - 1.$

6. $u_t = a^2 u_{xx} + x + 2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 0,\, u_x(1,t) = 1,$
$u(x,0) = x.$

7. $u_t = a^2 u_{xx} + t, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 2t,\, u(1,t) = 1,$
$u(x,0) = x - 3sin2\pi x.$

8. $u_t = a^2 u_{xx} + 2xt, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = -1,\, u(1,t) = t,$
$u(x,0) = 1 - x - cos\frac{7\pi}{2}x.$

9. $u_t = a^2 u_{xx} + 2t^3, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 1,\, u_x(1,t) = 2t,$
$u(x,0) = 1 + sin\frac{5\pi}{2}x.$

10. $u_t = u_{xx} + t^2 - 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 5,\, u_x(1,t) = -1,$
$u(x,0) = 2 + 5x - 3x^2.$

11. $u_t = a^2 u_{xx} + 2t^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = t,\, u(1,t) = 2t,$
$u(x,0) = 2sin\pi x - sin3\pi x.$

12. $u_t = a^2 u_{xx} + t, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 2t,\, u(1,t) = 1,$
$u(x,0) = 1 + 2cos\frac{5\pi}{2}x.$

13. $u_t = a^2 u_{xx} + 2xt, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 2t,\, u_x(1,t) = 1,$
$u(x,0) = x - 2sin\frac{3\pi}{2}x.$

14. $u_t = u_{xx} + 3t - 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 2,\, u_x(1,t) = 2,$
$u(x,0) = 1 + 2x - 2cos3\pi x.$

15. $u_t = a^2 u_{xx} + 3t, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 1,\, u(1,t) = t,$
$u(x,0) = 1 - x + sin4\pi x.$

16. $u_t = a^2 u_{xx} + 2xt, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 2t,\, u(1,t) = t,$
$u(x,0) = 4cos\frac{3\pi}{2}x.$

17. $u_t = a^2 u_{xx} + t^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = t,\, u_x(1,t) = 2t,$
$u(x,0) = 4sin\frac{9\pi}{2}x.$

18. $u_t = u_{xx} + 2t, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 3,\, u_x(1,t) = 1,$
$u(x,0) = 1 + 3x - x^2.$

19. $u_t = a^2 u_{xx} + 2t, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = t^2,\, u(1,t) = 1,$
$u(x,0) = x - sin\pi x + 2sin5\pi x.$

20. $u_t = a^2 u_{xx} + t, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 2,\, u(1,t) = t^2,$
$u(x,0) = 2x - 2 + cos\frac{5\pi}{2}x.$

21. $u_t = a^2 u_{xx} + x + t, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 2t^2,\, u_x(1,t) = t,$
$u(x,0) = sin\frac{\pi}{2}x - 3sin\frac{3\pi}{2}x.$

22. $u_t = u_{xx} + t - 2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\, u_x(1,t) = 2,$
$u(x,0) = 1 + x^2 - cos3\pi x + 2cos4\pi x.$

23. $u_t = a^2 u_{xx} - 2x + 2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 2t,\, u(1,t) = t^2,$
$u(x,0) = sin2\pi x - 2sin3\pi x.$

24. $u_t = a^2 u_{xx} + tx - 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = t^2,\, u(1,t) = 1,$
$u(x,0) = 1 - cos\frac{\pi}{2}x\ .$

25. $u_t = a^2 u_{xx} + 5xt, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 1,\, u_x(1,t) = 2t^2,$
$u(x,0) = 1 + sin\frac{5\pi}{2}x.$

26. $u_t = u_{xx} + 2t^2 + 3, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 2,\, u_x(1,t) = 0,$
$u(x,0) = 2 + 2x - x^2 - 4cos2\pi x.$

27. $u_t = a^2 u_{xx} + 4xt, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 3,\, u(1,t) = t^2,$
$u(x,0) = 3 - 3x + 2sin\pi x.$

28. $u_t = a^2 u_{xx} + 4xt + 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 2t^2,\, u(1,t) = t,$
$u(x,0) = cos\frac{5\pi}{2}x - cos\frac{7\pi}{2}x.$

29. $u_t = a^2 u_{xx} + 6t, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 4t^2,\, u_x(1,t) = 1,$
$u(x,0) = x + 4sin\frac{3\pi}{2}x.$

30. $u_t = u_{xx} + t - 2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 1,\, u_x(1,t) = 3,$
$u(x,0) = 3 + x + x^2 - 2cos4\pi x.$

31. $u_t = a^2 u_{xx} - 2x(t-2), \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = t^2,\, u(1,t) = 4t,$
$u(x,0) = 4sin3\pi x - 3sin5\pi x.$

32. $u_t = a^2 u_{xx} + x - 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = t,\, u(1,t) = 2t^2,$
$u(x,0) = 2cos\frac{3\pi}{2}x - cos\frac{9\pi}{2}x.$

33. $u_t = a^2 u_{xx} + 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = t,\, u_x(1,t) = t^2,$
$u(x,0) = 3sin\frac{\pi}{2}x - sin\frac{11\pi}{2}x.$

34. $u_t = u_{xx} + 2xt^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 1,\, u_x(1,t) = 1,$
$u(x,0) = 1 + x - 3cos2\pi x + cos5\pi x.$

35. $u_t = a^2 u_{xx} + xt^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 2,\, u(1,t) = t^3,$
$u(x,0) = 2 - 2x - sin5\pi x.$

36. $u_t = a^2 u_{xx} + 6xt^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 2t^3,\, u(1,t) = 1,$
$u(x,0) = 1 + cos\frac{3\pi}{2}x + cos\frac{7\pi}{2}x.$

37. $u_t = a^2 u_{xx} + 2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 2t,\, u_x(1,t) = t^3,$
$u(x,0) = sin\frac{3\pi}{2}x - 2sin\frac{7\pi}{2}x.$

38. $u_t = u_{xx} + t + 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = -1,\, u_x(1,t) = 1,$
$u(x,0) = 2 - x + x^2 - 3cos4\pi x.$

39. $u_t = a^2 u_{xx} + 3t^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = t^3,\, u(1,t) = 1,$
$u(x,0) = x - 2sin\pi x + 3sin2\pi x.$

40. $u_t = a^2 u_{xx} + 3(x-1), \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 3t,\, u(1,t) = 2t^3,$
$u(x,0) = cos\frac{\pi}{2}x - cos\frac{3\pi}{2}x.$

41. $u_t = a^2 u_{xx} + 4xt^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 2,\, u_x(1,t) = 2t^3,$
$u(x,0) = 2 - sin\frac{9\pi}{2}x.$

42. $u_t = u_{xx} + t + 2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 1,\, u_x(1,t) = -1,$
$u(x,0) = 1 + x - x^2 + cos2\pi x - cos3\pi x.$

43. $u_t = a^2 u_{xx} - 3xt^2 + 2x, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = t^3,\, u(1,t) = 2t,$
$u(x,0) = 3sin2\pi x - sin5\pi x.$

44. $u_t = a^2 u_{xx} + t^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 1,\, u(1,t) = t^3,$
$u(x,0) = x - 1 + cos\frac{7\pi}{2}x.$

45. $u_t = a^2 u_{xx} + 4x, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = t^3,\, u_x(1,t) = 4t,$
$u(x,0) = 3sin\frac{\pi}{2}x - sin\frac{7\pi}{2}x.$

46. $u_t = u_{xx} + t^2 - 3, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\, u_x(1,t) = 4,$
$u(x,0) = 1 + 2x^2 + 3cos5\pi x.$

47. $u_t = a^2 u_{xx} + 4(1-x), \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 4t,\, u(1,t) = t^3,$
$u(x,0) = sin2\pi x - 2sin3\pi x.$

48. $u_t = a^2 u_{xx} + 3xt^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = t^3,\, u(1,t) = 2t,$
$u(x,0) = 5cos\frac{\pi}{2}x - 2cos\frac{5\pi}{2}x.$

49. $u_t = a^2 u_{xx} + 2t^2, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u(0,t) = 2t^3,\, u_x(1,t) = 1,$
$u(x,0) = x - 2sin\frac{3\pi}{2}x.$

50. $u_t = u_{xx} + 2t - 1, \quad 0 < x < 1,\, t > 0,$
$u_x(0,t) = 1,\, u_x(1,t) = 5,$
$u(x,0) = 3 + x + 2x^2 + 2cos\pi x - cos3\pi x.$

*Указание 1.* В задачах 1 - 8, когда источники тепла не зависят от переменной $t$, общее решение неоднородного уравнения теплопроводности удобно искать в виде суммы двух функций: $v(x)$ и $w(x,t)$, где $v(x)$ - частное решение неоднородного уравнения теплопроводности, а $w(x,t)$ - общее решение однородного уравнения с нулевыми граничными условиями.

*Указание 2.* В задачах с ненулевыми граничными условиями часто бывает полезно предварительно представить решение $u(x,t)$ как сумму двух функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$, где функция $v(x,t)$ удовлетворяет на границе тем же условиям, что и функция $u(x,t)$. Таким образом, задача сводится к нахождению решения $w(x,t)$ некоторого уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями. Функцию $v(x,t)$ можно искать в виде $v(x,t) = A(t)x + B(t)$, либо $v(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x$.

## Тема 4. Метод разделения переменных для уравнения Лапласа в областях с круговыми границами

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Лапласа в круге, записанную в полярной системе координат,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \quad \rho < a, \tag{1}$$

$$u(a,\varphi) = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{2}$$

Будем искать частное решение задачи в виде

$$u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi).$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (1) получим

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

где $\lambda = const$. Отсюда получаем два уравнения

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \tag{3}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0. \tag{4}$$

Отметим, что функция $\Phi$ является $2\pi$ – периодичной

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \tag{5}$$

Задача (3), (5) дает счетное число собственных значений и функций

$$\Phi_n(\varphi) = A_n cos\sqrt{\lambda_n}\varphi + B_n sin\sqrt{\lambda_n}\varphi, \quad \sqrt{\lambda_n} = n, \quad n = 0,1,2,....$$

Решение уравнения (4) представляется в виде

$$R_0(\rho) = C_0 + D_0 ln\rho, \quad R_n = C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}, \quad n = 1,2,.... \tag{6}$$

Условие ограниченности решения дает $D_n = 0$, $n = 0, 1, 2, ...$. Таким образом, имеется бесчисленное множество решений уравнения (1), удовлетворяющих условию $2\pi$ – периодичности,

$$u_n(\rho, \varphi) = R_n(\rho)\Phi_n(\varphi), \quad n = 0, 1, 2, ....$$

А соответственно общее решение уравнения (1) представляется в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (a_n cosn\varphi + b_n sinn\varphi).$$

Коэффициенты $a_n$, $b_n$ находятся из граничного условия (2).

В случае, когда требуется найти решение уравнения Лапласа внутри кольца $a \le \rho \le b$, в представлении (6) для $R_i(\rho)$, $i = 0, 1, 2, ...$ требуется сохранить оба слагаемых, так как в отличии от задачи для круга точка $\rho = 0$ находится вне кольца.

В результате получим частные решения в виде

$$u_0(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 ln\rho,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = (a_n\rho^n + b_n\rho^{-n})cosn\varphi + (c_n\rho^n + d_n\rho^{-n})sinn\varphi, \quad n = 0, 1, 2, ....$$

Составляя затем общее решение и требуя удовлетворения краевым условиям, получим соотношения из которых можно определить коэффициенты $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$.

**Контрольные задания по теме:**

**Задание 1.** Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения Пуассона в кольце $0 < a < \rho < b$, при $m = 1, 2, 3$

1. $\Delta u(\rho, \varphi) = 2$,
   $u(a, \varphi) = 0$, $u(b, \varphi) = cosm\varphi$.
2. $\Delta u(\rho, \varphi) = 2$,
   $u(a, \varphi) = sinm\varphi$, $u_\rho(b, \varphi) = 0$.
3. $\Delta u(\rho, \varphi) = 2$,
   $u_\rho(a, \varphi) = 0$, $u(b, \varphi) = 3cos2m\varphi$.
4. $\Delta u(\rho, \varphi) = 12\rho^2$,
   $u(a, \varphi) = 2cosm\varphi$, $u(b, \varphi) = 0$.
5. $\Delta u(\rho, \varphi) = 12\rho^2$,
   $u(a, \varphi) = 0$, $u_\rho(b, \varphi) = 2sin2m\varphi$.
6. $\Delta u(\rho, \varphi) = 12\rho^2$,
   $u_\rho(a, \varphi) = sin(m + 1)\varphi$, $u(b, \varphi) = 0$.
7. $\Delta u(\rho, \varphi) = 4 + 12\rho^2$,
   $u(a, \varphi) = 1 + sin3m\varphi$, $u(b, \varphi) = 0$.
8. $\Delta u(\rho, \varphi) = 4 + 12\rho^2$,
   $u(a, \varphi) = 0$, $u_\rho(b, \varphi) = 3cos(m + 1)\varphi$.

9. $\Delta u(\rho, \varphi) = 4 + 12\rho^2$,
   $u_\rho(a, \varphi) = 1 + 2cos3m\varphi$, $u(b, \varphi) = 0$.

10. $\Delta u(\rho, \varphi) = 4 + 12\rho^2$,
    $u(a, \varphi) = m$, $u(b, \varphi) = 2m$.

11. $\Delta u(\rho, \varphi) = 4 + 12\rho^2$,
    $u(a, \varphi) = cos(m-1)\varphi$, $u_\rho(b, \varphi) = 3cos2m\varphi$.

12. $\Delta u(\rho, \varphi) = 4 + 12\rho^2$,
    $u_\rho(a, \varphi) = 4sin2m\varphi$, $u(b, \varphi) = 2cos(m+1)\varphi$.

13. $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$,
    $u_\rho(a, \varphi) = 2sinm\varphi + cos2m\varphi$, $u_\rho(b, \varphi) = 0$.

14. $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$,
    $u_\rho(a, \varphi) = 0$, $u_\rho(b, \varphi) = 2cosm\varphi - sin\varphi$.

15. $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$,
    $u_\rho(a, \varphi) = sinm\varphi$, $u_\rho(b, \varphi) = 2cos(m+1)\varphi$.

16. $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$,
    $u_\rho(a, \varphi) = cos2m\varphi - sin\varphi$, $u_\rho(b, \varphi) = 4sinm\varphi$.

*Указание 1*. В краевых задачах 1 – 12 для неоднородного уравнения Лапласа (уравнения Пуассона) общее решение удобно искать в виде суммы двух функций: $v(\rho)$ и $w(\rho, \varphi)$, где $v(\rho)$ - частное решение уравнения Пуассона (ищется как функция, зависящая только от $\rho$), а $w(\rho, \varphi)$ - общее решение уравнения Лапласа.

**Задание 2.** Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения Лапласа в кольцевом секторе $0 < a < \rho < b$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{\alpha}$ при $\alpha = 1, 2, 3, 4$

1. $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$,
   $u(\rho, 0) = u(\rho, \frac{\pi}{\alpha}) = 0$,
   $u(a, \varphi) = 3sin\alpha\varphi - sin2\alpha\varphi$, $u(b, \varphi) = 0$.

2. $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$,
   $u(\rho, 0) = u(\rho, \frac{\pi}{\alpha}) = 0$,
   $u_\rho(a, \varphi) = 0$, $u(b, \varphi) = 2sin\alpha\varphi - 3sin4\alpha\varphi$.

3. $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$,
   $u(\rho, 0) = u(\rho, \frac{\pi}{\alpha}) = 0$,
   $u(a, \varphi) = sin\alpha\varphi$, $u_\rho(b, \varphi) = 4sin2\alpha\varphi$.

4. $\Delta u(\rho, \varphi) = 0$,
   $u(\rho, 0) = u(\rho, \frac{\pi}{\alpha}) = 0$,
   $u_\rho(a, \varphi) = 3sin2\alpha\varphi$, $u_\rho(b, \varphi) = 5sin\alpha\varphi$.

**Тема 5. Метод разделения переменных для уравнения Лапласа в областях с плоскими границами**

Пусть требуется найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{1}$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям

$$u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = F(x), \quad u(0,y) = g(y), \quad u(a,y) = G(y), \tag{2}$$

и пусть краевые значения функции $u(x,y)$ непрерывны, то есть

$$f(0) = g(0), \quad f(a) = G(0), \quad F(0) = g(b), \quad F(a) = G(b).$$

Представим решение задачи (1), (2) в виде суммы

$$u(x,y) = U(x,y) + v(x,y),$$

где $U(x,y)$ – гармоническая функция, выбираемая так, чтобы функция $v(x,y)$ во всех вершинах прямоугольника обращалась в нуль, а в остальном была совершенно произвольна. Полагая

$$U(x,y) = A + Bx + Cy + Dxy,$$

мы видим, что эта функция гармоническая. Коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$ выбираем в соответствии с указанным выше условием для $v(x,y)$.

Гармоническая функция $v(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$v(x,0) = f(x) - U(x,0), \quad v(x,b) = F(x) - U(x,b),$$

$$v(0,y) = g(y) - U(0,y), \quad v(a,y) = G(y) - U(a,y),$$

Функцию $v(x,y)$ можно представить в виде суммы четырех гармонических функций $v_i(x,y)$, $i = 1,2,3,4$ каждая из которых принимает заданное значение на одной из сторон и обращается в нуль на остальных трех сторонах. Вид каждой функции $v_i(x,y)$ можно найти, используя метод разделения переменных.

**Контрольные задания по теме:**

Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике $0 < x < a$, $0 < y < b$

1. $\Delta u(x,y) = 2$,
   $u(0,y) = 2y^2$, $u(a,y) = 2y^2 + 2a^2$,
   $u(x,0) = 2x^2$, $u(x,b) = 2x^2 + 2b^2$.

2. $\Delta u(x,y) = 4$,
   $u(0,y) = y^2$, $u(a,y) = y^2 + a^2$,
   $u(x,0) = x^2$, $u(x,b) = x^2 + b^2$.

3. $\Delta u(x,y) = 4 + 6x$,
   $u(0,y) = 3y^2$, $u(a,y) = 3y^2 + a^2 + a^3$,
   $u(x,0) = x^2 + x^3$, $u(x,b) = x^2 + x^3 + 3b^2$.

4. $\Delta u(x,y) = 2 + 6y$,
   $u(0,y) = 2y^2 + y^3$, $u(a,y) = 2y^2 + y^3 + 3a^2$,
   $u(x,0) = 3x^2$, $u(x,b) = 3x^2 + 2b^2 + b^3$.

5. $\Delta u(x,y) = 2 + 12x^2$,
   $u(0,y) = 3y^2$, $u(a,y) = 3y^2 + 2a^2 + a^4$,
   $u(x,0) = 2x^2 + x^4$, $u(x,b) = 2x^2 + x^4 + 3b^2$.

6. $\Delta u(x,y) = 4 + 12y^2$,
   $u(0,y) = y^2 + y^4$, $u(a,y) = y^2 + y^4 + 3a^2$,
   $u(x,0) = 3x^2$, $u(x,b) = 3x^2 + b^2 + b^4$.

7. $\Delta u(x,y) = 2 + 6x + 12x^2$,
   $u(0,y) = 2y^2$, $u(a,y) = 2y^2 + 3a^2 + a^3 + a^4$,
   $u(x,0) = 3x^2 + x^3 + x^4$, $u(x,b) = 3x^2 + x^3 + x^4 + 2b^2$.

8. $\Delta u(x,y) = 4 + 6y + 12y^2$,
   $u(0,y) = y^2 + y^3 + y^4$, $u(a,y) = y^2 + y^3 + y^4 + a^2$,
   $u(x,0) = x^2$, $u(x,b) = x^2 + b^2 + b^3 + b^4$.

9. $\Delta u(x,y) = 6 + 6y + 12x^2$,
   $u(0,y) = 2y^2 + y^3$, $u(a,y) = 2y^2 + y^3 + a^2 + a^4$,
   $u(x,0) = x^2 + x^4$, $u(x,b) = x^2 + x^4 + 2b^2 + b^3$.

10. $\Delta u(x,y) = 2 + 6x + 12y^2$,
    $u(0,y) = 3y^2 + y^4$, $u(a,y) = 3y^2 + y^4 + 2a^2 + a^3$,
    $u(x,0) = 2x^2 + x^3$, $u(x,b) = 2x^2 + x^3 + 3b^2 + b^4$.

11. $\Delta u(x,y) = 2$,
    $u_x(0,y) = 1$, $u(a,y) = 1 + y + y^2$,
    $u(x,0) = 1 - 2a + 2x$, $u(x,b) = 1 + b + b^2$.

12. $\Delta u(x,y) = 2$,
    $u_x(0,y) = y$, $u(a,y) = 1 + 2y + a^2$,
    $u(x,0) = 1 + x^2$, $u(x,b) = 1 - a + 2b + x + x^2$.

13. $\Delta u(x,y) = 2 + 6y$,
    $u_x(0,y) = 3y$, $u(a,y) = 2 + y + y^2 + y^3$,
    $u(x,0) = 2 - a + x$, $u(x,b) = 2 + b + b^2 + b^3$.

14. $\Delta u(x,y) = 2 + 6x$,
    $u_x(0,y) = 1$, $u(a,y) = 1 + 3y + a^2 + a^3$,
    $u(x,0) = 1 + x^2 + x^3$, $u(x,b) = 1 - 3a + 3b + 3x + x^2 + x^3$.

15. $\Delta u(x, y) = 2,$
$u(0, y) = 1 - b + y + y^2,\ u(a, y) = 1 + a + y^2,$
$u_y(x, 0) = 1,\ u(x, b) = 1 + x + b^2.$

16. $\Delta u(x, y) = 2,$
$u(0, y) = 1 + y^2,\ u(a, y) = 1 + a - b + y + y^2,$
$u_y(x, 0) = 2x,\ u(x, b) = 1 + x + b^2.$

17. $\Delta u(x, y) = 2,$
$u(0, y) = 1 - 2b + 2y,\ u(a, y) = 1 + a + a^2,$
$u_y(x, 0) = 1,\ u(x, b) = 1 + x + x^2.$

18. $\Delta u(x, y) = 2,$
$u(0, y) = 1,\ u(a, y) = 1 + a + a^2 - b + y,$
$u_y(x, 0) = x,\ u(x, b) = 1 + x + x^2.$

19. $\Delta u(x, y) = 2,$
$u(0, y) = y^2,\ u(a, y) = 1 + y^2,$
$u_y(x, 0) = 2,\ u_y(x, b) = 2b.$

20. $\Delta u(x, y) = 4,$
$u(0, y) = y + 2y^2,\ u(a, y) = 1 + 2y^2,$
$u_y(x, 0) = 0,\ u_y(x, b) = 2.$

21. $\Delta u(x, y) = 2 + 6y,$
$u(0, y) = 2y + y^2 + y^3,\ u(a, y) = y^2 + y^3,$
$u_y(x, 0) = 0,\ u_y(x, b) = 2x + 2b + 3b^2.$

22. $\Delta u(x, y) = 4 + 12y^2,$
$u(0, y) = 2y^2 + y^4,\ u(a, y) = 3y + 2y^2 + y^4,$
$u_y(x, 0) = 1,\ u_y(x, b) = 4b + 4b^3.$

23. $\Delta u(x, y) = 4,$
$u_x(0, y) = 1,\ u_x(a, y) = 4a,$
$u(x, 0) = 2x^2,\ u(x, b) = x + 2x^2.$

24. $\Delta u(x, y) = 2,$
$u_x(0, y) = 0,\ u_x(a, y) = 3y + 2a,$
$u(x, 0) = 2x + x^2,\ u(x, b) = x^2.$

25. $\Delta u(x, y) = 4 + 6x,$
$u_x(0, y) = 2,\ u_x(a, y) = 4a + 3a^2,$
$u(x, 0) = 2x^2 + x^3,\ u(x, b) = 3 + 2x^2 + x^3.$

26. $\Delta u(x, y) = 2 + 12x^2,$
$u_x(0, y) = 0,\ u_x(a, y) = y + 2a + 4a^3,$
$u(x, 0) = 1 + x^2 + x^4,\ u(x, b) = x^2 + x^4.$

27. $\Delta u(x, y) = 2$,
$u(0, y) = y + y^2$, $u_x(a, y) = 1$,
$u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, b) = 2b$.

28. $\Delta u(x, y) = 4$,
$u_x(0, y) = 2y$, $u(a, y) = 2a^2$,
$u_y(x, 0) = 2x^2$, $u_y(x, b) = 1 + 2x^2$.

29. $\Delta u(x, y) = 2 + 6y$,
$u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 1$,
$u(x, 0) = 3x$, $u_y(x, b) = 2b + 3b^2$.

30. $\Delta u(x, y) = 2 + 12x^2$,
$u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 2a + 4a^3$,
$u_y(x, 0) = 2x$, $u(x, b) = 1 + x^2 + x^4$.

31. $\Delta u(x, y) = 2$,
$u_x(0, y) = 0$, $u(a, y) = y + a^2$,
$u_y(x, 0) = 1$, $u(x, b) = x^2 + b$.

32. $\Delta u(x, y) = 4 + 6y$,
$u_x(0, y) = 2$, $u(a, y) = 2y^2 + y^3 + a$,
$u_y(x, 0) = 0$, $u(x, b) = x + 2b^2 + b^3$.

33. $\Delta u(x, y) = 2$,
$u(0, y) = 1 + 2y + y^2$, $u_x(a, y) = 0$,
$u(x, 0) = 1$, $u_y(x, b) = 1 + 2b$.

34. $\Delta u(x, y) = 4 + 6x$,
$u(0, y) = 2$, $u_x(a, y) = 2 + 4a + 3a^2$,
$u(x, 0) = 2 + x + 2x^2 + x^3$, $u_y(x, b) = 0$.

35. $\Delta u(x, y) = 2$,
$u_x(0, y) = 1$, $u(a, y) = 1 + y + a^2$,
$u(x, 0) = 1 + x^2$, $u_y(x, b) = 0$.

36. $\Delta u(x, y) = 2 + 6y$,
$u_x(0, y) = 2y$, $u(a, y) = 3 + y^2 + y^3$,
$u(x, 0) = 3$, $u_y(x, b) = 1 + 2b + 3b^2$.

37. $\Delta u(x, y) = 2 + 12x^2$,
$u(0, y) = 1$, $u_x(a, y) = 3y + 2a + 4a^3$,
$u_y(x, 0) = 2$, $u(x, b) = 1 + x^2 + x^4$.

38. $\Delta u(x, y) = 2$,
$u(0, y) = 1$, $u_x(a, y) = 1 + 2a$,
$u_y(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 1 + 3x + x^2$.

Литература


1. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М: Наука, 1972.
2. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М: Наука, 1975.
3. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М: Наука, 1977.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М: Наука, 1981.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М: Наука, 1972.
6. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: Наука, 1974.

.

**Ковтанюк Андрей Егорович**

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО
УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Утвержден к печати Ученым советом
Института прикладной математики ДВО РАН

Лицензия ЛР N 040118 от 15.10.96 г.
Подписано к печати 14.10.99 г. Формат 60x84/16
Усл.п.л. 1,63. Уч.-изд.л. 1,02 .
Тираж 100 экз. Заказ 155 .

---

Издательство "Дальнаука"
690041, Владивосток, Радио, 7