Государственный комитет Российской Федерации по высшему образованию
Дальневосточный государственный университет

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

Учебно-методическое пособие по курсу "Методы Оптимизации"

Владивосток 2003

УДК 519.85

Тема, рассмотренная в данном пособии, относится к числу сравнительно простых для слушателей курса "Методы оптимизации". Поэтому студент, знакомый с общими основами теории выпуклого и линейного программирования, может самостоятельно освоить теорию и метод решения транспортных задач линейного программирования. Именно для этой цели предназначено это учебно-методическое пособие, представляющее сжатый конспект лекций по данной теме.

Подготовлено кафедрой процессов управления.
Составитель Л.В.Горячев
Печатается по решению научно-методического Совета ДВГУ.

Настоящее методическое пособие предназначено для студентов – слушателей курса "Методы оптимизации". Вместе с учебно-методическими работами "Практический минимум по методам оптимизации", "Одномерная минимизация", "Выпуклые функции и их свойства"и т.д. оно образует учебно-методический комплекс для выполнения самостоятельной работы по данному курсу. Рассматриваемая тема относится к числу простых в курсе и поэтому доступна для самостоятельного изучения даже лишь с помощью данного пособия.

Задачи транспортного типа составляют специальный и довольно обширный класс задач линейного программирования. Объединяющим признаком этого класса служит наличие особого типа ограничений. Специфичность структуры матрицы условий таких задач делает неэффективным применение для их решения стандартного симплекс-метода и его математического обеспечения и требует использования специальных методов. Напомним основные свойства задач линейного программирования (Л.П.)

Пусть дана задача ЛП в канонической форме: минимизировать линейную форму

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

В векторно-матричной форме задача имеет вид

$$(c, x) - \min \tag{1'}$$

$$Ax = b \tag{2'}$$

$$x \geq 0 \tag{3'}$$

Векторы A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ в матрице A называются векторами условий. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям (1)-(3), называется планом задачи. Оптимальным планом задачи ЛП называется план, минимизирующий целевую функцию (1)

План x называется опорным, если векторы A_j, отвечающие его положительным компонентам, линейно-независимы. Невырожденный опорный план содержит m положительных компонент, вырожденный опорный план содержит более чем $n - m$ нулевых компонент/

Система линейно-независимых векторов A_j, отвечающих положительным компонентам опорного плана, образует его базис. Можно считать, что базис любого опорного плана состоит из m линейно-независимых векторов.

Сформулируем основные теоремы ЛП, отражающие свойства планов задачи.

Теорема. Если множество планов задачи (1)–(3) не пусто, то среди них имеется хотя бы один опорный план.

Теорема. Если множество планов задачи (1)–(3) не пусто и целевая функция ограничена снизу на этом множестве, то задача имеет хотя бы один оптимальный опорный план.

Доказательство этих теорем приводится в лекциях. Методы анализа и решения задач ЛП существенно опираются на теорию двойственности. Задача, двойственная к (1)–(3), формулируется следующим образом: найти вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$, максимизирующий линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

или в векторно-матричной форме

$$(b, y), \quad A^T y \leq c$$

Задачи (1)–(3) и (4)–(5) называют парой двойственных (сопряженных) задач.

Теорема. Если одна из пары двойственных задач имеет решение, то сопряженная с ней задача также разрешима и на оптимальных планах этих задач значения целевых функций совпадают.

Пара условий: $x_j \geq 0, \ \sum a_{ij} y_i \geq c_j, \ j = 1, 2, \ldots, n$ называются сопряженными парами условий для задач (1)–(3) и (4)–(5).

Теорема. В каждой паре сопряженных условий на оптимальный планах: если одно свободное, то другое — закрепленное.

Перечисленные свойства задач ЛП широко используются для анализа задач транспортного типа.

Рассмотрение начнем с простейших моделей. К их числу относится модель следующего типа:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - min$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = b, \ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

В этой задаче система ограничений, кроме ограничений на знак переменных, состоит из одного уравнения. Поэтому опорный план содержит одну положительную компоненту, а оптимальный опорный план легко находится. Действительно, пусть $\min\{c_j\} = c_{j_0}$, тогда компоненты оптимального опорного плана

$$x_j^* = \begin{cases} b_j, \ j = j_0 \\ 0, \ j \neq j_0 \end{cases}$$

К этой задаче приводится следующая:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - min$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Замена переменной $y_j = a_j x_j$ приводит нас к предыдущей модели. Таким образом, решение одноиндексных транспортных задач (Т.З.) тривиально.

Простейшие двухлинейные Т.З. также не вызывают серьезных трудностей при анализе: найти набор $X = \|x_{ij}\|$, минимизирующий линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = a_i, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$$

Эта задача распадается на m одноиндексных задач, решение которых тривиально. Оптимальный план исходной задачи формируется из оптимальных решений частных задач. Другой простейшей двухидексной задачей транспортного типа является задача: найти набор $X = \|x_{ij}\|$, минимизирующий

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = b, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$$

Эта задача сводится к уже рассмотренной простой нумерацией множества пар индексов (i, j) одним индексом $k = 1, 2, \dots, m \cdot n$.

Более сложной из известных двухиндексных Т.З. является следующая. Пусть в пунктах $A_1, A_2, \dots, A_m$ производится (или хранится) некоторый однородный продукт, причем объем производства в пункте A_i составляет a_i единиц. Указанный продукт потребляется в пунктах $B_1, B_2, \dots, B_n$, причем объем потребления в пункте B_i равен b_i единиц. Допустим, что транспортные издержки, приходящиеся на единицу продукта при перевозке его из i-ого пункта производства в j-ый пункт потребления составляют c_{ij} денежный единиц. Требуется найти такой план перевозок (распределение продукта по потребителям), при котором потребности всех потребителей будут удовлетворены, весь продукт будет вывезен и при этом суммарные транспортные затраты будут минимальны.

Пусть x_{ij} — количество продукта, транспортируемое из пункта A_i в пункт B_j, математическая модель такой задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \min \tag{6}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{8}$$

$$x_{ij} \geq 0 \tag{9}$$

Равенства (7) гарантируют полный вывоз продукта из всех пунктов производства, равенства (8) означают полное удовлетворение потребителей, условия (9) естественны. Т.З. в такой постановке определяется заданием вектора объемов производства $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$, вектора объема потребления $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$) и матрицы транспортных издержек

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

План Т.З. также удобно записать в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

План X иногда называют планом перевозок, а компоненты x_{ij} — перевозками. Для задания и решения Т.З. удобно пользоваться таблицей

	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	$c_{11},\ x_{11}$	$c_{12},\ x_{12}$	$\dots$	$c_{1n},\ x_{1n}$
a_2	$c_{21},\ x_{21}$	$c_{22},\ x_{22}$	$\dots$	$c_{2n},\ x_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\vdots\vdots$	$\vdots$
a_m	$c_{m1},\ x_{m1}$	$c_{m2},\ x_{m2}$	$\dots$	$c_{mn},\ x_{mn}$

Для того, чтобы понять специфичность условий Т.З., запишем ее в развернутом виде при $m =$

2, $n = 3$.

$$\begin{array}{llllllll}
c_{11}x_{11}+ & c_{12}x_{12}+ & c_{13}x_{13}+ & c_{21}x_{21}+ & c_{22}x_{22}+ & c_{23}x_{32} & - \min \\
x_{11}+ & x_{12}+ & x_{13} & & & & = a_1 \\
& & & x_{21}+ & x_{22}+ & x_{23} & = a_2 \\
x_{11}+ & & & x_{21} & & & = b_1 \\
& x_{12}+ & & & x_{22} & & = b_2 \\
& & x_{12}+ & & & +x_{23} & = b_3
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Матрица A коэффициентов ограничений имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,1 \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{ - я позиция} \\ \\ \\ \\ m+j\text{ - я позиция} \\ \\ \\ \end{array}$$

Она сильно разряжена, ее вектор условий A_{ij} имеет две отличные от нуля компоненты, равные 1, одна в i - ой позиции, а другая в $m + j$ - ой позиции. Как следует из постановки, Т.З. имеет $m \cdot n$ ограничений-равенств и $m \cdot n$ переменных. Отметим наиболее важные свойства Т.З.

Теорема. Для разрешимости задачи (6)-(9) необходимо и достаточно выполнения условия баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Данное условие означает совпадение суммарного объема производства с суммарным объемом потребления. Транспортные задачи, для которых это условие выполняется, называются закрытыми.

Доказательство. Необходимость. Предполагаем, что Т.З. разрешима. Это означает совместность ее условий. Пусть набор $X^* = \left\|x^*_{ij}\right\|$ является планом, то есть удовлетворяет условиям (7) и (8). Просуммируем условия (7) по i, а (8) – по j. В результате получим

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum_{i=1}^{m} b_i$$

откуда непосредственно следует равенство $\sum a_i = \sum b_j$.

Достаточность. Пусть условие баланса выполняется. Построим набор $X^* = \|x_{ij}|\|$, где $x_{ij} = \dfrac{a_i b_k}{\alpha}$, $d = \sum a_i = \sum b_j$. Очевидно, что построенный набор является планом Т.З. Действительно,

$$\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \frac{a_i}{d}\sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x^*_{ij} = \frac{b_j}{d}\sum_{i=1}^{m} a_i = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\
x^*_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}$$

Таким образом множество допустимых планом Т.З. не пусто. Легко видеть, что оно также является ограниченным, выпуклым и замкнутым (выпуклый компакт). Линейная форма на выпуклом компакте ограничена снизу и достигает на нем своего минимума, то есть задача разрешима. Это свидетельствует о достаточности условия баланса.

Из приведенного выше примера Т.З. для $m = 2$ и $n = 3$ видна зависимость между условиями-равенствами. Действительно, сложив первые два условия и вычтя из полученного результата следующие два условия, мы получим последнее уравнение. Таким образом, каждое условие-равенство является следствием остальных условий.

Теперь убедимся, что число независимых условий-равенств Т.З. равно $m + n - 1$. Для этого достаточно найти в матрице A квадратную подматрицу порядка $m + n - 1$ с определителем, не равным нулю. Такую подматрицу нетрудно найти в матрице, составленной из векторов $A_{1n}, A_{2n}, \ldots, A_{mn}, A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{i\,n-1}$. Первые $m + n - 1$ строк такой матрицы образуют верхнюю треугольную подматрицу с диагональными элементами, равными 1, и определителем, отличным от нуля. Таким образом, в системе условий-равенств Т.З. одно условие излишнее и его можно отбросить. Однако это обычно не делают, чтобы не нарушать симметричность форм задачи.

Ранг матрицы условий A определяет число линейно-независимых векторов, составляющих базис Т.З. Таким образом, базис Т.З. состоит из $m + n - 1$ вектора, а невырожденный опорный план содержит $m + n - 1$ положительных компонент. Сказанное позволяет сформулировать:

Утверждение. Если все a_i и b_i — неотрицательные целые числа, то любой опорный план является целочисленным.

Доказательство. Оно вытекает из того, что ранг матрицы A условий Т.З. равен $m + n - 1$, а система базисных векторов содержит треугольную подматрицу $m + n - 1-$го порядка. Данное утверждение сформулируем в несколько иной форме, имеющей многочисленные теоретические приложения.

Теорема. Любой минор матрицы A равен 0 либо ± 1.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Для миноров первого порядка утверждение очевидно, так как элементы A — нули и единицы. Допустим, что теорема верна для миноров матрицы A порядка $k-1$, и докажем ее справедливость для миноров порядка k. Разделим обе строки матрицы A на две группы: первые m строк отнесем к $1-$ой группе, а следующие n — ко $2-$ой. Каждый столбец A содержит одну единицу среди строк $1-$ой группы. Пусть $\triangle_k$ — произвольный минор порядка k. Каждый столбец $\triangle_k$ содержит либо две единицы, либо одну единицу, либо будет нулевым. В последнем случае, очевидно, $\triangle_k = 0$. В случае, если хотя бы в одном столбце $\triangle_k$ содержится ровно одна единица, разлагая минор по этому столбцу, получаем, что $\triangle_k = \pm\triangle_{k-1}$, где $\triangle_{k-1}$ — некоторый минор матрицы A порядка $k-1$. Если же во всех столбцах $\triangle_k$ — по две единицы, то среди строк $\triangle_k$ имеются представители как первой, так и второй групп строк матрицы A. Выбирая любую строку $\triangle_k$ из первой группы, прибавляем к ней остальные строки из этой группы. Получаем строку, состоящую из единиц. Аналогично поступаем с одной из строк второй группы и получаем еще одну строку из единиц. Проведенные преобразования не меняют величину $\triangle_k$. Итак, $\triangle_k$ совпадает с определителем, обладающим двумя одинаковыми строками, и, следовательно, равен нулю.

Анализ Т.З., как и любой части ЛП, существенно опирается на результаты теории двойственности. Введем вектор $W(v_1, v_2, \ldots, v_n, -u_1, -u_2, \ldots, -u_m)^T$, где v_j — двойственные переменные, отвечающие условиям (8), $-u_i$ — отвечают условиям (7), $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Знак минус перед u_i принят ради удобства интерпретации задачи. Переменные v_j и $-u_i$ называют потенциалами столбцов и строк соответственно.

Согласно общему правилу построения двойственных задач ЛП, задача, двойственная к Т.З., имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i - \max \tag{10}$$

при условии

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

Ограничения на знаки двойственных переменных отсутствуют, поскольку условия (7)–(8) прямой задачи имеют вид равенств. Согласно общим свойствам пар двойственных задал ЛП, для любых планов $X = \|x_{ij}\|_{mn}$ и $W(v_1, v_2, \ldots, v_n, -u_1, -u_2, \ldots, -u_m)^T$ прямой и двойственной задач, соответственно, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \ge \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

Непосредственно из условий двойственности задачи следует, что ее допустимый план определяется с точностью до const. Действительно, если $W(v_1, v_2, \ldots, v_n, -u_1, -u_2, \ldots, -u_m)^T$ — допустимый план, то $W'(v_1 + h, v_2 + h, \ldots, v_n + h, -(u_1 + h), -(u_2 + h), \ldots, -(u_m + h))^T$ также допустим, в чем можно убедиться подстановкой W' в условия.

Численный анализ Т.З. существенно опирается на следующий признак оптимальности

Теорема. Для оптимальности опорного плана $X = \|x_{ij}\|$ транспортной задачи необходимо и достаточно существование чисел $v_1, v_2, \ldots, v_n, -u_1, -u_2, \ldots, -u_m$ таких, что $v_j - u_i \leq c_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ и $v_j - u_i = c_{ij}$, при $x_{ij}\ 0$.

Доказательство. Необходимость. Если $X^0 = \left\|x^0_{ij}\right\|$ — оптимальный опорный план, то ему отвечает система оценок столбцов матрицы A, которая удовлетворяет условиям, совпадающим с условиями теоремы.

Достаточность. Пусть существует такая система чисел, что условия теоремы справедливы. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^0_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(v_j - u_i)x^0_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

Равенство целевых функций сопряженных задач на допустимых планах свидетельствует об оптимальности этих планов. Очевидно, что оптимальному опорному плану отвечает система потенциалов $v_j - u_i$ (оптимальный план двойственной задачи), такая, что неравенства $\leq$ выполняются для всех i и j, а базисным компонентам отвечают равенства. Мы уже отмечали, что базис невырожденного опорного плана состоит из $m + n - 1$ вектора, таково же число базисных компонент. Значит матрица невырожденного опорного плана $X^0 = \left\|x^0_{ij}\right\|_{mn}$ содержит $m + n - 1$ положительных элементов. Опорный план обладает наглядным геометрическим свойством, которое легко обнаружить на матрице плана.

Определение. Компоненты плана образуют замкнутый маршрут (цикл), если их можно соединить горизонтальными и вертикальными отрезками так, что они образуют замкнутую цепочку. Приведем примеры планов, содержащих цикл:

$$X_1 = \begin{Vmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{Vmatrix} \quad X_2 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{Vmatrix} \quad X_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 8 \end{Vmatrix}$$

В матрице X_1 цикл образуют компоненты $x_{12}, x_{42}, x_{43}, x_{13}$, в матрице X_2 цикл образован компонентами $x_{11}, x_{21}, x_{23}, x_{43}, x_{42}, x_{12}$, в матрице X_3 в цикле участвуют перевозки $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, x_{34}, x_{14}$. Легко видеть, что векторы-условия A_{ij}, отвечающие компонентам цикла, линейно-зависимы. Например, для цикла X_2 вектора $A_{11}, A_{12}, A_{42}, A_{43}, A_{23}, A_{21}$ линейно-зависимы. Действительно,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

Следствие. Из компонент опорного плана нельзя составить цикл.

Метод потенциалов Т.З.

Метод потенциалов состоит из конечной последовательности однотипных итераций. Каждая итерация состоит из двух этапов. На первом этапе опорный план, полученный на предыдущей итерации, проверяется на оптимальность. Если он оказывается решением задачи, то процесс заканчивается. Если это не так, то переходим ко второму этапу. На этом этапе строится новый опорный план перевозок, , который либо уменьшает транспортные издержки (невырожденный случай), либо оставляет их без изменений (вырожденный случай). Опишем отдельную итерацию метода, ограничившись вначале невырожденным случаем.

Допустим, что мы находимся на $k-$ой итерации метода и имеем опорный план $X^k = \left\|x_{ij}^k\right\|_{mn}$. Рассмотрим очередную $k+1$ итерацию.

Этап 1. Составляем систему уравнений для определения потенциалов строк и столбцов: $v_j - u_i = c_{ij}$ для (i,j) – базисных. Число уравнений, ввиду опорности плана, равно $m+n-1$, а число переменных — $m+n$. Значение одной из переменных, например u_1, зададим сами $u_1 = 0$. Тогда система довольно просто решается, и находятся неизвестные $u_i,\ v_j,\ i = 1,2,\ldots,m$. Если полученные величины удовлетворяют неравенствам $v_j - u_i \leq c_{ij}$ для любой пары (i,j), то опорный план является оптимальным планом двойственной задачи. Если же хотя бы для одной пары индексов $(i,j)\quad v_j - u_i > c_{ij}$, то план X^k не оптимален и может быть улучшен.

Этап 2. Вычисляем уклонения для всех внебазисных клеток $\triangle_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$. По условию, среди чисел $\triangle_{ij}$ есть отрицательные. Определим пару (i_0, j_0) из условия $\triangle_{i_0 j_0} = \min \triangle_{ij}$. Вообще говоря, в качестве (i_0, j_0) можно принять любую пару (i,j) с отрицательным уклонением, но такой выбор ускоряет сходимость. Из выбранной и базисной клеток строим цикл. Это можно сделать, так как система векторов будет линейно-зависима. В новом опорном плане будет присутствовать клеточка (i_0, j_0), поэтому надо найти базисную клеточку цикла, которая должна быть исключена. Таким образом, общее число базисных компонент останется равным $m+n-1$. В узлах цикла, начиная с клеточки (i_0, j_0), расставляем поочередно знаки $''+''$ и $''-''$. Рассмотрим клеточки цикла со знаком $''-''$. Минимальную перевозку в таких клетках обозначим через Θ_0, то есть

$$\Theta_0 = \min_{(i,j)} x_{ij} = x_{i_k j_l} \tag{12}$$

От перевозок, стоявших в клеточках с $''-''$, отнимаем величину Θ_0, а в клеточках с $''+''$ добавим к перевозкам величину Θ_0. В результате клеточка (i_k, j_l) выйдет из числа базисных, а оставшиеся в плане клеточки будут образовывать новый опорный план. Возможно, что в некоторых клеточках нового опорного плана будут нулевые перевозки: этот случай возникнет, если минимум в (12) будет достигаться на двух или более парах (i,j). Значение линейной формы Т.З. на новом опорном плане уменьшиться на величину $\Theta_0 \triangle_{i_0 j_0}$. (Доказать!).

Если улучшаемым является вырожденный опорный план, тогда среди базисных компонент имеются нулевые перевозки. В этом случае при переходе по методу потенциалов к следующему опорному плану величина Θ_0 окажется равной нулю и, следовательно, суммарные транспортные издержки не уменьшаться. При этом монотонность убывания нарушается и конечность алгоритма, вообще говоря, не очевидна.

Построение начальных опорных планов.

1. Метод северо-западного угла. Алгоритм построения плана состоит из нескольких шагов, на каждом из которых заполняется либо строка (случай 1), либо столбец (случай 2) матрицы плана $X = \|x_{ij}\|_{m\cdot n}$. Процесс начинается с заполнения клеточки $(1,1)$: $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Если $a_1 < b_1$, тогда $x_{11} := a_1$, остальные клеточки строки остаются незаполненными, и первую строку исключаем из дальнейшего рассмотрения, $b_1 := b_1 - a_1$.

Если $a_1 \geq b_1$, тогда $x_{11} = b_1$, исключаем из рассмотрения первый столбец, а $a_i = a_1 - b_1$. На этом первый шаг заканчивается. Допустим, что уже проделано t шагов, опишем $t+1$ шаг.

Снова найдем левый верхний элемент матрицы плана X из числа еще не определенных. Пусть этим элементом будет $x_{\lambda\mu},\ (\lambda+\mu = t+2)$. Полагаем, $x_{\lambda\mu} = \min(a_\lambda, b_\mu),\ a_\lambda := a_\lambda - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}$, где $b_\mu := b_\mu - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}$. Если $a_\lambda < b_\mu$, то $x_{\lambda\mu} := a_\lambda$, $b_\mu := b_\mu - a_\lambda$ и строку λ исключаем из рассмотрения.

Если $a_\lambda \geq b_\mu$, то заполняем нулями $\mu-$ый столбец, начиная с $(\lambda+1)-$й строки. При этом $a_\lambda := a_\lambda - b_\mu$.

Алгоритм продолжает работать до полного распределения произведенного продукта по пунктам потребления. План, полученный методом северо-западного угла, всегда является опорным. Это следует из того, что на каждом шаге мы вычеркиваем либо строку, либо столбец, что означает, что ни одна из заполняемых клеток не войдет в цикл. На последнем шаге заполняются две или более клеточки.

Примерами построения опорных планов методом северо-западного угла могул служить планы в следующих Т.З.:

Пример 1

	3	2	4	2	2
2	2	0	0	0	0
4	1	2	1	0	0
7	0	0	3	2	2

Пример 2

	1	3	3	2	5
3	1	2	0	0	0
7	0	1	3	2	1
4	0	0	0	0	4

Число итераций, необходимых для решения Т.З. методом потенциалов, существенно зависит от вида первоначального плана. Удачны выбор исходного плана может существенно сократить количество итераций и тем самым ускорить решение задачи. Опорный план, построенный по методу северо-западного угла, учитывает лишь объемы производства и потребления пунктов и совершенно не связан с матрицей транспортных издержек. Поэтому можно модифицировать метод, увязав алгоритм построения опорного плана со стоимостью перевозок. Эта модификация называется методом минимального элемента.

2. Метод минимального элемента. Этот метод состоит из последовательных шагов.

Шаг 1. Определим минимальный элемент матрицы транспортных издержек $C = \|c_{ij}\|_{m \cdot n}$. Если им оказался c_{ij}, то полагаем $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$ и поступаем так же, как в методе северо-западного угла.

Шаг 2. После вычеркивания $i-$ой строки $(a_{i_1} < b_{j_1})$ или j_1-го столбца $(a_{i_1} \geq b_{j_1})$ получим сокращенную матрицу C_1.

Второй шаг состоит в проведении уже описанных операций применительно к C_1. В результате заполняется еще одна перевозка и вычеркивается строка или столбец матриц X и C. Процесс продолжается до полного распределения продукции между потребителями. Очевидно, что метод минимального элемента сводится к методу северо-западного угла, если перенумеровать пункты производства и потребления в соответствии с порядком вычеркивания строк и столбцов матрицы C. Отсюда следует, что модифицированный метод также приводит к опорному плану за $m+n-1$ шагов. В таблице 1 приведен опорный план , построенный методом минимального элемента (в левом углу клеток — элементы матрицы затрат c_{ij}).

	5	9	9	7
II	7	8 3	5 1	3 7
II	2 5	4 6	5	9
8	6	3	1 8	2

Таблица 1

Из других методов построения опорных планов можно отметить метод аппроксимации Фогеля.

Задача. Решить Т.З. с тремя поставщиками с объемами продукции, равными 10, 8 и 12 единиц и четырьмя потребителями с потребностями 8, 5, 7 и 10 единиц соответственно. Матрица транспортных затрат имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Условие баланса выполняется: 10+8+12=8+5+7+10. Начальный опорный план X^0

определим методом северо-западного угла (таблица 2).

	8	5	7	10
10	2 8	3 2	5	7
8	4	1 3	3 − 5	2 +
12	6	3	2 + 2	5 − 10

Таблица 2

	8	5	7	10
10	2 8	3 2	5	7
8	4	1 − 3	3	2 + 5
12	6	3 +	2 7	5 − 5

Таблица 3

Для проверки плана на оптимальность определим потенциалы строк и столбцов. Для этого для каждой базисной клеточки выпишем уравнение $v_j - u_i = c_{ij}$.

$$
\begin{aligned}
v_1 - u_1 = 2, \quad & v_3 - u_2 = 3 \\
v_2 - u_1 = 3, \quad & v_3 - u_3 = 2 \\
v_2 - u_2 = 1, \quad & v_4 - u_3 = 5
\end{aligned}
$$

Положив $u_1 = 0$, находим последовательно $v_1 = 2, v_2 = 3, u_2 = 2, v_3 = 5, u_3 = 3, v_4 = 8$. Полученные u_i, v_j используем для проверки условий оптимальности других клеток таблицы. Для внебазисных клеток находим величины

$$
\begin{aligned}
c_{13} - v_3 + u_1 = 5 + 0 - 3 = 2, \quad & c_{24} - v_4 + u_2 = 2 + 2 - 8 = -4 \\
c_{14} - v_4 + u_1 = 7 + 0 - 8 = -1, \quad & c_{31} - v_1 + u_3 = 6 + 3 - 2 = 7 \\
c_{21} - v_1 + u_2 = 4 + 2 - 2 = 4, \quad & c_{32} - v_2 + u_3 = 3 + 3 - 3 = 3
\end{aligned}
$$

Для оптимальности опорного плана согласно алгоритму достаточно выполнения условия $c_{ij} - v_j + u_i \geq 0$. Однако это условия нарушается и наибольшее нарушение имеет место в клеточке (2.4). Поэтому перевозку x_{24} следует ввести согласно алгоритму в опорный план. Для этого строим цикл, начинающийся в клеточке (2.4). Этот цикл приведен в таблицу 2, он содержит клеточки (2.4), (3.4), (3.3), (2,3). Сравнивая перевозки в клеточках с $''-''$, находим величину коррекции плана $\Theta = \min\{5, 10\} = 5$. Проведя коррекцию плана, получаем новый опорный план, приведенный в таблице 3. Транспортные затраты, отвечающие новому опорному плану, равны 74 единицы, то есть уменьшились на 20 единиц относительно предыдущего.

Повторяем процедуру проверки очередного опорного плана на оптимальность. Находим потенциалы строк и столбцов из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
v_1 - u_1 = 2, \quad & v_4 - u_2 = 2, \quad & u_1 = 0,\ u_2 = 2,\ v_3 = 1 \\
v_2 - u_1 = 3, \quad & v_3 - u_3 = 2, \quad & v_1 = 2,\ v_4 = 4 \\
v_2 - u_2 = 1, \quad & v_4 - u_3 = 5, \quad & v_2 = 3,\ u_3 = -1
\end{aligned}
$$

Проверяем условие $v_j - u_i \leq c_{ij}$ для внебазисных клеточек.

$$
\begin{aligned}
c_{13} - v_3 + u_1 = 5 + 0 + 1 = 6, \quad & c_{23} - v_3 + u_2 = 3 + 3 - 1 = 5 \\
c_{14} - v_4 + u_1 = 7 + 0 - 4 = 3, \quad & c_{31} - v_1 + u_3 = 6 - 1 - 2 = 3 \\
c_{21} - v_1 + u_2 = 4 + 2 - 2 = 4, \quad & c_{32} - v_2 + u_3 = 3 - 1 - 3 = -1
\end{aligned}
$$

Условие оптимальности нарушено, в единственной клеточке (3.2). Строим цикл, начинающийся в этой клеточке (см. таблицу 2). Величина коррекции $\Theta = \min\{3, 5\}$. Проводя коррекцию плана, получаем новый опорный план (таблица 3). Анализ полученного плана показывает, что опорный план оптимален. Минимальные затраты на транспортировку составляют 71 единицу.

Мы рассматривали ранее Т.З., для которых выполнялось условие баланса. В практических случаях это условие может не выполняться. Пусть имеется m пунктов производства с объемами $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и n пунктов с объемами $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Допустим, что $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Математическая модель задачи:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - min\\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n\\
&x_{ij} \ge 0
\end{aligned}$$

Сформулированная Т.З., отличающаяся от классической постановки (6)–(9) наличием условий-неравенств, легко сводится к предыдущей введением фиктивного пункта потребления $(n+1)-$го с объемом потребления $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Полагая, что стоимость перевозок $c_{i,\,n+1}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ между $i-$ым пунктом производства и фиктивным пунктом потребления равна нулю, открытую Т.З. сводим к классической постановке

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - min$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1\\
&x_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n+1
\end{aligned}$$

Если условие баланса нарушено в другую сторону, то полное удовлетворения всех потребителей невозможно. В этом случае поступают следующим образом: вводится фиктивный производитель A_{m+1} с объемом производства $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Стоимости перевозок от пункта a_{m+1} к потребителям $b_j,\ j = (\overline{1,n})$ полагаются достаточно большими числами.

К Т.З. приводятся задачи, математическая модель которых имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - min\\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m\\
&\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n\\
&x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

Замена переменной $y_{ij} = \alpha_i x_{ij}$ приводит задачу к стандартному типу.

Дальнейшее обобщение Т.З. связано с рассмотрением многоиндексных задач. Например, требуется составить план транспортировки некоторого однородного продукта от центра производства к центрам потребления с использованием транспортных средств различных типов, реализация которого обеспечивала бы минимальные транспортные затраты. Формальная запись условий задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}x_{ijk} - min$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$
$$x_{ijk} \geq 0$$

Здесь смысл a_i, b_j остается прежним, а c_k — количество продукции, которое может быть перевезено k – ым транспортным средством, c_{ijk} — стоимость транспортировки единицы продукции из i – го центра производства j – му потребителю транспортным средством k – го типа. Для разрешимости этой задачи необходимо и достаточно выполнения условия $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i = \sum_{k=1}^{p} c_k$. Для решения этой задачи может быть применен метод потенциалов.

Трехиндексная транспортная задача может быть сформулирована и в следующей форме. Пусть имеется m центров производства p видов продукции, потребляемой n предприятиями. Будем считать известными:

a_{ij} — количество продукции, поставляемой i – ым центром производства j – му потребителю.

b_{jk} — количество продукта k, необходимое центру потребления j (определяется планом реализации продукции).

c_{ik} — количество продукта k, выпускаемого пунктом i (определяется плановым заданием).

x_{ijk} — объем поставок продукции вида k центром производства i потребителю j. Математическая модель имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}x_{ijk} - min$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = b_{jk}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, p$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = c_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, p$$
$$x_{ijk} \geq 0$$

Разнообразные транспортные задачи можно найти в [1,2,3].

Распределительная задача.

Распределительная задача (Р.З.) — одно из наиболее важнейших в практическом отношении обобщений транспортной задачи (Т.З.). Специфика условий позволяет ценой незначительных усложнений решать ее уже известными нам методами. Формальная постановка требует минимизировать линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - min \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{15}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Такую задачу принято называть распределительной или обобщенной транспортной. Она часто возникает в практике планирования транспортных перевозок, где требуется найти план закрепления самолетов (судов, автомобилей) за направлением так, чтобы задание по объему перевозок на каждом направлении было выполнено, а суммарные транспортные расходы были минимальны.

В других вариантах Р.З. условия (14)–(15) имеют смешанный вид. Р.З. имеет $m \cdot n$ переменных и $m+n$ ограничений. Вектор-столбец условий A_{ij}, отвечающий переменной x_{ij}, также содержит не более двух отличных от нуля компонент: i – й и $(m+n)$ – й. Р.З. удобно записать в матричном виде

	b_1	b_2	$\ldots$	b_n
a_1	c_{11} λ_{11} x_{11}	c_{12} λ_{12} x_{12}	$\ldots$ $\ldots$	c_{1n} λ_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} λ_{21} x_{21}	c_{22} λ_{22} x_{22}	$\ldots$ $\ldots$	c_{2n} λ_{2n} x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	c_{m1} λ_{m1} x_{m1}	c_{m2} λ_{m2} x_{m2}	$\ldots$ $\ldots$	c_{mn} λ_{mn} x_{mn}

Если коэффициенты $\lambda_{ij} = \alpha_i \beta_j$, $i = (\overline{1,m})$, $j = (\overline{1,n})$, то Р.З. легко сводится к Т.З. заменой переменных (Показать!). Ранг матрицы условий больше распределительной задачи в общем случае (если ранг матрицы A больше 1) равен $m+n$. Это значит, что базис распределительной задачи состоит из $m+n$ линейно-независимых векторов, а невырожденный опорный план имеет $m+n$ положительных компонент. Отсюда решение двойственных соотношений для определения потенциалов строк и столбцов, отвечающих рассматриваемому опорному плану, несколько усложняется.

Задача, двойственная к (13)–(16), имеет вид

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \\ &\lambda_{ij} v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad i = (\overline{1,m}), \; j = (\overline{1,n}) \\ &u_i \geq 0, \quad i = (\overline{1,m}) \end{aligned}$$

Как и для Т.З., опорный план X распределительной задачи является оптимальным, если отвечающая ему система потенциалов v_j, u_i удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} c_{ij} - \lambda_{ij} + u_i \geq 0, \quad & i = (\overline{1,m}), \; j = (\overline{1,n}) \\ u_i \geq 0 \quad & \end{aligned}$$

В случае нарушения хотя бы одного условия опорный план должен быть улучшен. Отыскание опорного исходного плана основано на тех же соображениях, что и метод минимального элемента для транспортной задачи.

Начиная с произвольной позиции (i_1, j_1) искомой матрицы плана X, положим

$$x_{i_1 j_1} = \begin{cases} \min\{a_i, \; b_{j_1}/\lambda_{i_1 j_1}\}, & \text{если } \lambda i_1 j_1 > 0 \\ a_i, & \text{если } \lambda i_1 j_1 \leq 0 \end{cases}$$

Если $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$, то полагаем $x_{i_1 j} = 0$ для $j = j_1$, если $x_{i_1 j_1} = \frac{b_{j_1}}{\lambda_{i_1 j_1}}$, то $x_{i_1 j_1} = 0$ для $i \neq i_1$. В случае равенства $a_{i_1} = \frac{b_{j_1}}{\lambda_{i_1 j_1}}$, которое имеет место в случае невырожденности, нулями дополняется либо i_1 – я строка, либо j_1 – й столбец матрицы плана.

Правые части ограничений (14)–(15) преобразуются:

$$a_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \neq i_1 \\ a_i - x_{i_1 j_1}, & \text{если } i = i_1 \end{cases}$$

$$b_{j_1} = \begin{cases} b_{j_1}, & \text{если } j \neq j_1 \\ b_{j_1} - \lambda_{i_1 j_1} x_{i_1 j_1}, & \text{если } j = j_1 \end{cases}$$

Если для некоторых j: $\sum \lambda_{ij} x_{ij} < b_j$, то вводятся новые искусственные переменные $x_{m+1,\,j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} xij$, причем $c_{m+1\,j}$ полагается равным достаточно большому числу. Это приводит к необходимости решать задачу с искусственными переменными для построения опорного плана.

Литература.

1. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования.–М.,1964.
2. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования.–М.,1982
3. Ашманов С.А. Линейное программирование.–М.,1982