министерство высшего образования и среднего специального образования россии
дальневосточный государственный университет

Одномерная минимизация

Методические указания к самостоятельной работе студентов по курсу “Методы оптимизации”

Владивосток, 2003

УДК 519.8

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов по курсу “Методы оптимизации”. Рассмотрена достаточно простая тема: “Методы одномерной минимизации”, детально разбираются наиболее известные методы, приведены вычислительные схемы, разобраны примеры.

Подготовлено кафедрой процессов управления ДВГУ
Составитель: Горячев Л.В.
Печатается по решению учебно-методического Совета ДВГУ

Методы поиска экстремумов функции одного переменного составляют содержание наиболее простого раздела курса “Методы оптимизации” Для его изучения необходимо лишь знание начальных основ математического анализа. В связи с уменьшением в учебных планах аудиторных занятий и повышением роли самостоятельной работы студентов имеет определенный смысл вынести эту тему в рамки самостоятельных занятий. Поэтому, на наш взгляд, целесообразно дать студенту, изучающему курс “Методы оптимизации”, сжатое изложение основных понятий и алгоритмов указанного раздела с соответствующими указаниями полезными при самостоятельной работе.
Пусть требуется найти

$$\min f(x)$$

при условии $a \leq x \leq b$, где a и b-заданные концы отрезка.
Из курса математического анализа известно, что дифференцируемая функция $f(x)$ достигает своего минимума в точках x^*, где $f'(x) = 0$ или в граничных точках. Точки, в которых $f'(x^*) = 0$ называются стационарными, их локализация-первый этап решения задачи на экстремум. Из множества стационарных точек необходимо выделить те, в которых действительно необходимо сравнит значения функции в точках локального минимума и на концах отрезка и выбрать среди них минимальное. Соответствующая ему точка будет являться точкой глобального минимума. Решением нашей задачи будет точка глобального минимума и значение $f(x)$ в этой точке.
Напомним, что для идентификации точки локального минимума исследуют знак второй производной функции. Достаточным условием локального минимума является положительность$f''(x^*)$ Если $f'(x^*)$ не существует, то следует проследить за знаком первой производной. Перемена знака с “$-$” на “$+$” соответствует случаю убывания функции слева от точки x^*, и возрастанию справа, т. е. минимуму функции. Если же $f'(x)$ меняет знак с “$-$” на “$+$” при переходе через x^*, то имеет место локальный максимум.
Такой способ поиска минимума можно применять в тех случаях, когда функции $f(x)$ и ее производные вычисляются сравнительно просто. В практических задачах нахождение производных функций и нахождение корней уравнения $f'(x^*) = 0$ может представлять большие трудности. В связи с этим важно иметь в арсенале методов оптимизации и методы, основанные не на вычислении производных, а на вычислении только значений функции в ряде специально подбираемых точек. При этом естественно желать, чтобы число таких точек стало возможно меньшим, а точность определения точки оптимума была не ниже заданной.
Последовательность действий при реализации большинства этих методов такова:
1. Согласно некоторому правилу выбирается несколько точек на отрезке $[a, b]$ и на основе анализа значений в этих точках производится локализация минимума (максимума), т. е. выделяется новый отрезок$[a_1, b_1], a \leq a_1 < b_1 \leq b$, на котором продолжается дальнейший поиск.
2. На полученном отрезке $[a_1, b_1]$ снова по указанному правилу берется ряд точек для последующей локализации точки минимума, т. е. получаем новый отрезок. Процесс продолжается до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше заданной величины, либо пока не будет вычислено априори заданное число значений функции.
3. Имеется правило, по которому на последнем отрезке для x^*.
Очень простые алгоритмы поиска точек минимума (максимума) могут быть получены, если предположить, что исследуемая функция $f(x)$ удовлетворяет условию унимодальности (одноэкстремальности).
<u>Определение</u>: Функция $f(x)$ называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если $\exists!$ точка на этом отрезке такая, что для любых точек x_1, x_2 этого отрезка из $x^* \leq x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x^*) \leq f(x_1) \leq f(x_2)$; из $x^* \geq x_1 \geq x_2 \Longrightarrow f(x^*) \geq f(x_1) \geq f(x_2)$. Другими словами унимодальная функция монотонна на обе стороны от точки минимума x^*. Аналогично определяется унимодальная функция и для задачи на максимум. Унимодальные функции могут быть непрерывными, разрывными, дискретными и другими...

Основное свойство унимодальной функции состоит в том, что при помощи любой пары точек отрезка можно уменьшить отрезок поиска точки минимума.

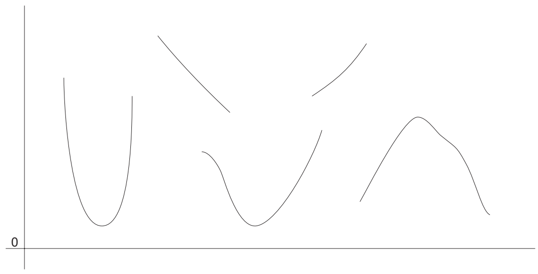
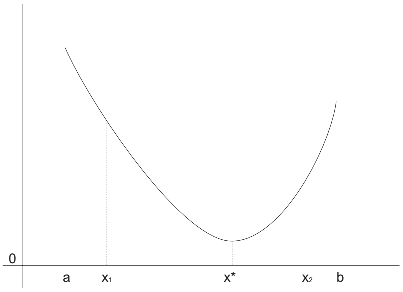
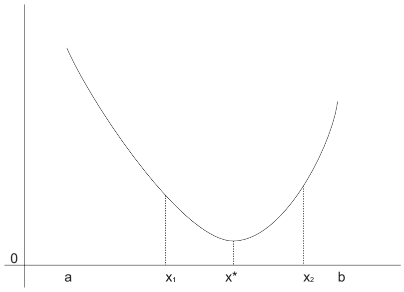


Рис. 1: Унимодальные функции





Теорема: Пусть функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a, b]$, а ее минимум достигается в точке x^*. Для любых точек x_1 и x_2 этого отрезка и таких, что $a < x_1 < x_2 < b$ верно следующее: 1. если $f(x_1) > f(x_2)$, то точка минимума $x^* \in [x_1, b)$ (рис. 2) 2. если $f(x_1) < f(x_2)$, то точка минимума $x^* \in (a, x_2]$ (рис. 3). Доказательство: Рассмотрим случай, когда $f(x_1) > f(x_2)$. Допустим противное, т. е. $x^* \in (a, x_1]$. Тогда, так как x^*-точка минимума, то по определению $f(x^*) \leq f(x)$ для $x \in [a, b]$ Получаем двойное неравенство $f(x^*) \leq f(x_1) > f(x_2)$ при $x^* < x_1 < x_2$, как однако это невозможно, так унимодальная функция монотонна по обе стороны от точки x^*. Аналогичные соображения действуют в случае, когда $f(x_1) < f(x_2)$. Примечание: Если $f(x_1) = f(x_2)$, то можно исключать оба крайних интервала, при этом точка минимума будет принадлежать отрезку $[x_1, x_2]$. Таким образом, организовав специальным способом выбор точек на отрезке, можно построить процедуру последовательного исключения интервалов отрезка. Процедура завершается, когда оставшиийся отрезок не достигнет достаточно малых размеров. При этом не требуется, чтобы исследуемая функция была дифференцируемой и даже нерпрерывной, более того она может быть задана таблично. Рассмотрим наиболее простые методы поиска минимума (максимума) унимодальной функции, с которыми должен быть знаком каждый студент, прослушавший курс по экстремальным задачам.

Метод деления отрезка пополам. Рассматриваем задачу отыскания точки минимума x^* унимодальной функции $f(x)$, определенной на отрезке. Возьмем две точки. $x_1 = \frac{a+b-\delta}{2}; x_2 = \frac{a+b+\delta}{2}$, где δ-достаточно малая положительная постоянная. При этом точки x_1, x_2 делят отрезок почти пополам-отсюда название метода. Вычисляем и сравниваем значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ Если $f(x_1) > f(x_2)$?nj согласно доказанной теореме новый отрезок поиска точки x^* будет $[x_1, b]$. Границы нового отрезка обозначим через a_1 и b_1, т. е. $a_1 = x_1, b_1 = b$. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то $a_1 = a, b_1 = x_2$. При этом длина нового отрезка будет $\Delta_1 = b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} + (1 - \frac{1}{2})\delta$ На новом отрезке повторяем процедуру выбора точек x_1 и x_2 (мы сохраняем их обозначения) и сравнения значений функции в этих точках. На k-ой итерации будем иметь: $x_1 = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}-\delta}{2}; x_2 = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}+\delta}{2}; \Delta_k = b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} + (1 - \frac{1}{2^k}\delta) = \frac{b-a-\delta}{2^k} + \delta$ Если приводим k шагов процедуры, то количество рассматриваемых точек и соответственно количество вычисленных значений функции равно: $n = 2k$. Если полученный отрезок $[a_k, b_k]$достаточно мал (см. ниже), то принять середину отрезка за решение задачи $x^* \approx x_n^* = \frac{a_k+b_k}{2}$. при этом погрешность составляет $|x^* - x_n^*| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} + \frac{\delta}{2}$. В случаях, когда вычисление значений функции не вызывает затруднений, итерации следует проводить до тех пор, пока $\frac{1}{2}(b_k - a_k) < \varepsilon$ или $\frac{b-a-\delta}{2^{k+1}}$, где ε- требуемая заданная точность вычисления. Тогда можно получить оценку для числа необходимых итерации: $k > \log_2(\frac{b-a-\delta}{\varepsilon - \frac{\delta}{2}}) - 1$, число точек вычисления значений функции равно $N = 2k$.

В случаях, когда число вычислении значения функции априори задано, следует, что при $N = 2k$ точность вычисления точки минимума функции определяется величиной $\frac{b-a}{2^{k+1}} + \delta$, Замечание: Если функция дифференцируема и её производные могут быть вычислены, то алгоритм несколько упрощается: если $f'(\frac{a_k+b_k}{2}) < 0$, то, очевидно, что функция $f(x)$ убывает в окрестности точки $\frac{a_k+b_k}{2})$ и искомая точка x^* лежит правее этой точки, т. е. новый отрезок поиска $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$, если $f'(\frac{a_k+b_k}{2})$, то $x^* \in [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$. К недостатком этого метода относится тот факт, что информация о значении функции в точках x_1и x_2 используется только на одном шаге. Более подробно с этим методом можно ознакомиться в [1. 2].

Метод золотого сечения Золотым или гармоническим делением, называется такое деление отрезка $[a, b]$ точкой x на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине его большой части равно отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка, длина большей части отрезка является средней пропорциональной между длиной всего отрезка и меньшой его части. Для определения искомых точек необходимо составить уравнения:

$\frac{b-a}{x-a} = \frac{x-a}{b-x}$, если $[a, x]$-большая часть отрезка, и $\frac{b-a}{b-x} = \frac{b-x}{x-a}$, если $[x, b]$-большая часть отрезка. Отсюда, анализируя эти уравнения, мы получим две точки золотого сечения:

$$x_1 = a + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(b-a) \approx a + 0.382(b-a) - \text{левая точка} \qquad (*)$$

$$x_2 = a + \left(\frac{\sqrt{5}-1)}{2}\right)(b-a) \approx a + 0.618(b-a) - \text{правая точка} \qquad (**)$$

. При этом само соотношение, золотая пропорция $\tilde{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$ Пользуясь свойством унимодальности функции, сравниваем значения ее в этих точках: если $f(x_1) > f(x_2)$, то новый отрезок поиска есть $[a_1, b_1]$, где $a_1 = x_1, b_1 = b$, если $f(x_1) < f(x_2)$, то новый отрезок поиска имеет концы $a_1 = a, b_1 = x_2$. Можно показать (выполнить в качестве упражнения), что выбранные точки обладают следующими свойствами: 1. Точки x_1, x_2 лежат на одинаковом расстоянии от середины отрезка; 2. Точки x_1, x_2 расположены к середине отрезка, чем к своим концам; 3. Точка x_1 является точкой золотого сечения отрезка $[a, x_2]$, а точка x_2 является точкой золотого сечения отрезка $[x_1, b]$. Из последнего утверждения следует, что на последующем шаге мы уже будем иметь одну точку золотого сечения. Таким образом, на каждой итерации, кроме первой, метод золотого сечения требует определения лишь одной точки отрезка и одного значения функции, что и определяет большую эффективность этого метода по сравнению с методом половинного деления при заданной точности. Если зафиксировать число n вычислений значений функции $f(x)$, то методом золотого сечения значение x^* может быть найдено в 1.144^n раз точнее, чем методом деления отрезка пополам. Длина отрезка по методу золотого сечения убывает последующему правилу:

$$\Delta_n = (b-a)\left(\frac{\sqrt{5}-1^n}{2}\right)$$

Приведем схему метода золотого сечения. Пусть ε-требуемая точность вычисления точки минимума.

0. Начальный шаг: находим точки x_1 и x_2 по формулам (*) (**)

1. Вычисляем $f(x_1), f(x_2)$

если $f(x_1) > f(x_2)$, то переходим к шагу 4.

если $f(x_1) < f(x_2)$, то переходим к шагу 3.

если $f(x_1) = f(x_2)$, то переходим к шагу 2.

2. Получаем новый отрезок $[a, b]$, $a = x_1; b = x_2$.

Находим $h = \frac{b-a}{2}$;, если $h \le \varepsilon$, то $x^* \approx \frac{a+b}{2}, f_{min} \approx f(x^*)$ end, в противном случае переход к 0.

3. Получаем новый отрезок $[a, b]$, $a = a; b = x_2$.

Находим $h = \frac{b-a}{2}$, если $h \le \varepsilon$, то $x^* \approx \frac{a+b}{2}, f_{min} \approx f(x^*)$ end; в противном случае $x_2 = x_1$, находим x_1 по (*), переход к 1.

4. Получаем новый отрезок $[a, b]$, $a = x_1; b = b$.

Находим $h = \frac{b-a}{2}$, если $h \le \varepsilon$, то $x^* \approx \frac{a+b}{2}, f_{min} \approx f(x^*)$ end; в противном случае $x_1 = x_2$, находим

x_2 по (**), переход к 1.
Методы половинного и золотого сечения относятся к классу так называемых симметричных методов. Дело в том, что имеющиеся на каждом шаге две точки отрезка x_1 и x_2 симметрично расположены относительно центра этого отрезка. Благодаря этому свойству всякий симметричный метод полностью определяется заданием отрезка $[a, b]$ и правилом выбора первой точки. Тогда другая точка $x_2(x_1)$ находится по правилу общему для всех симметричных методов:
$x_2 = a + b - x_1$, если x_1 известна,
$x_1 = a + b - x_2$, если x_2 известна.
Несмотря на свою простоту и изящность, все симметричные методы обладают тем недостатком, что погрешность, допущенная в задании точки x_1 на первом шаге, приводит к быстрому накоплению погрешностей на дальнейших шагах и уже при небольших n результаты будут сильно отличаться от тех, которые могли бы получиться при точной реализации симметричного метода с точными исходными данными.
Впервые интерес к золотой пропорции возник еще в античной науке (Пифагор, Платон, Евклид). Античные скульптуры и архитекторы широко используют её в своих художественных произведениях. Об этом и других применениях золотой пропорции можно познакомится в книге А. П. Стахова (Коды золотой пропорции. -М, Радио и связь, 1984).
Для иллюстрации сказанного приведем простой пример: определить минимальное значение функции $e^{-x} - 2\cos x$ на отрезке $[0, 1]$. Точку x^* найти с абсолютной погрешностью $\varepsilon < 0.05$.
1. Имеем отрезок $[a, b] = [0, 1]$. Вычисляем на нем по правилам (*) и (**) точки x_1 и $x_2 : x_1 = 0.382, x_2 = 0.618$.
2. Вычисляем $f(x_1)$и$f(x_2) : f(x_1) = -1.1733; f(x_2) = -1.0910$.
3. Так как $f(x_2) > f(x_1)$, то имеем новый отрезок поиска: $[a, b] = [0, 0.618]$. Проверяем на остановку: $h = \frac{1}{2}(0.618 - 0) = 0.309 > 0.05$.
4. На новом отрезке нам уже известна одна точка золотого сечения $x_2 := x_1 = 0.382$. Находим $x_1 = 0 + 0.382 \cdot 0.616 = 0.236$.
5. Вычисляем $f(x_1), f(x_2)$ - нам известно: $f(x_1) = -1.155, f(x_2) = -1.1733$.
6. Сравнивая значения $f(x_1)$и$f(x_2)$, имеем, что $f(x_1) > f(x_2)$, следовательно приходим к новому отрезку $[a, b] = [0.236, 0.618]$. На нем имеет точку золотого сечения x_2, $h = (0.618 - 0.236)/2 = 0.191 > 0.05$.
7. Находим новые точки на отрезке $[0.238, 0.618]$:
$x_1 := x_2 = 0.382$;
$x_2 = 0.236 + 0.618 \cdot (0.618 - 0.236) = 0.472$.
8. Вычисляем $f(x_2) = -1.1575; f(x_1) = -1.1733$ - нам известно, так как $f(x_2) > f(x_1)$, заключаем, что новый отрезок поиска $[a, b] = [0.236, 0.472]$.
9. На новом отрезке
$x_2 := x_1 = 0.382$;
$x_1 = 0.236 + 0.318 \cdot (0.472 - 0.236) = 0.326$.
10. Находим $f(x_1) = -1.1728; f(x_2) = -1.1733$. Сравниваем: $f(x_1) > f(x_2)$. Заключаем, что новый отрезок $[a, b] = [0.326, 0.472]; h = 0.07 > 0.05$.
11. На новом отрезке
$x_1 := x_2 = 0.382$;
$x_2 = 0.326 + 0.618 \cdot (0.472 - 0.326) = 0.416$.
12. Находим $f(x_2) = -1.1696; f(x_1) = -1.1733$. Так как $f(x_1) < f(x_2)$, новый отрезок поиска $[a, b] = [0.326, 0.416]$, $h = \frac{1}{2}(0.416 - 0.326) = 0.045 < 0.05$. Вычисления закончены $x^* \approx \frac{1}{2}(0.416 + 0.326) = 0.372, f_{min} \approx f(0.372) = -1.1739$.

МЕТОД ФИБОНАЧЧИ

В тех случаях, когда вычисление значений функции в точках отрезка затруднительно (например, в условиях промышленного эксперимента) естественно стремление ограничиться числом необходимых измерений, не теряя в точности определения точки минимума. Поэтому в таких ситуациях применять метод, который бы при заданном n и мел бы наибольшую точность. К числу методов оптимальных по точности относится и метод Фибоначчи.
Числа Фибоначчи определяются соотношением:
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; n = 0, 1, 2, \ldots; F_0 = 0, F_1 = 1$.

Можно показать (выполнить это в качестве упражнения), что a)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)], n = 1, 2, \dots;$$

b)

$$lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Метод Фибоначчи также является симметричным и поэтому имеет много общего с методом золотого сечения. В последнем выбираемые на каждом шаге точки x_1, x_2 являются выпуклыми комбинациями концов текущего отрезка поиска:
$x_1 = (1-\lambda)a + \lambda b; x_2 = \lambda a + (1-\lambda)b;$
$\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}; (1-\lambda) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
Величина остается постоянной в ходе поиска.
В методе Фибоначчи
$x_1 = (1-\lambda_{n-1+k})a + \lambda_{n-k+1}b;$
$x_2 = (\lambda_{n-1+k})a + (1-\lambda_{n-k+1})b$
В этом методе $\lambda_{n-k+1} = \frac{x_1-a}{b-a}$ изменяется на каждом шагу.
На первом шаге $x_1 = a + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b-a);$
$x_2 = a + b - x_1 = a + (1 - \frac{F_n}{F_{n+1}})(b-a) = a + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$
Как и в методе золотого сечения, точки x_1, x_2 находятся на одинаковом расстоянии от середины отрезка $[a, b]$ и ближе к середине, чем к соответствующему концу.
На первом шаге $\lambda_n = \frac{F_n}{F_{n+2}}$
Число вычислений значений функции $f(x)$ фиксировано, текущим параметром процесса будет параметр k
Длина отрезка на втором шаге будет равна $(\Delta_1 = b-a); \Delta_2 = b - x_1 = x_2 - a = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b-a) = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}\Delta_1$
Если на втором шаге будем иметь отрезок поиска $[x_1, b]$, то точка x_2, будет левее середины нового отрезка. Поэтому на новом отрезке $[a, b] = [x_1, b]$, тогда роль x_1 играет точка x_2, т. е. $x_1 = a + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b-a)$, а $x_2 = a + \frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a)$ и т. д.
На k-ом шаге

$$x_1 = a + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+k+3}}(b-a); x_2 = a + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b-a), k = 1, 2, \dots, n$$

Длина отрезка поиска

$$\Delta_n = \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}\Delta_{k-1} = \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-2}}\Delta_1$$

При $k = n$ процесс заканчивается, в этом случае $x_1 = x_2$, длина отрезка поиска

$$\Delta_n = \frac{2}{F_{n+2}}\Delta_1$$

Поэтому за приближение к точке x^* берем точку $\overline{x} = x_1 = x_2$
Перед началом процесса поиска определяется наименьшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon F_{n+2} \geq b - a$$

Критерием остановки процесса служит выполнение условия $k = n$

Схема вычислений по методу Фибоначчи в остальном аналогична схеме метода золотого сечения. В качестве примера рассмотрим задачу определения точки минимума функции.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

на отрезке $[1, 2], n = 5$

$$1. k = 1, k \neq 5, [a, b] = [1, 2];$$

$$x_1 = 1 + \frac{5}{13}(2 - 1) = 1.38461$$

$$x_2 = 1 + \frac{8}{13}(2 - 1) = 1.61538$$

$$2. f(x_1) = 1.89892, f(x_2) = 1.89009$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$3. k = 2, n \neq k,$$

новый отрезок поиска $[1.38461, 2]$

$$x_1 := x_2$$

, находим новое значение x_2

$$x_1 = 1.61538$$

$$x_2 = 1.38461 + \frac{5}{8}(2 - 1.38461) = 1.76927$$

$$4. f(x_1) = 1.89003, f(x_2) = 1.89534$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$5. k = 3, n \neq k$$

, новый отрезок $[1.38461, 1.76927]$

$$x_2 := x_1 = 1.61538$$

Находим новое значение x_1

$$x_1 = 1.38461 + \frac{2}{5}(1.76927 - 1.38461) = 1.53846$$

$$6. f(x_1) = 1.89035, f(x_2) = 1.89003$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$7. k = 4, n \neq k$$

новый отрезок поиска $[1.53846, 1.76927]$

$$x_1 := x_2$$

находим новое значение

$$x_1 = 1.61538$$

$$x_2 = 1.53846 + \frac{2}{3}(1.76923 - 1.53846) = 1.69231$$

$$8. f(x_1) = 1.89003, f(x_2) = 1.89170$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$9. k = 5, n = k$$

процесс заканчивается, новый отрезок поиска $[1.53846, 1.69231]$;
одна точка известна, другая на этом шаге будет с ней совпадать

$$x_1 = x_2 = 1.61538, x^* \approx 1.61538 = \overline{x}$$

Найденное нами приближенное значение точки минимума $\overline{x}$ отличается от истинного значения на величину

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}(1.6923 - 1.53846) \approx 0.077$$

Приближенное значение функции $f(x)$ в точке минимума есть

$$f(1.61538) = 1.89003 \approx f_{min}$$

Применение описанных методов накладывает единственное требование на исследуемую функцию: она должна быть унимодальной.
Следовательно, указанные методы можно использовать для анализа, как непрерывных, так и разрывных функций, а также в случаях, когда переменные принимают значения из дискретного множества. Они принимают в расчет только отношение порядка на множестве значений функции и не учитывают величин разности между значениями функции. Поэтому естественно рассмотреть такие методы поиска, которые позволяют учесть относительные изменения значений функции. В некоторых случаях такие методы оказываются более эффективными. Выигрыш эффективности, однако, достигается введением дополнительного требования, согласно которому исследуемые функции должны быть достаточно гладкими.
Основная идея таких методов состоит в возможности аппроксимации гладкой функции полиномом и последующего его использования для оценивания координаты точки оптимума. Необходимыми условиями являются требования унимодальности и непрерывности исследуемой функции. Согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации, если функция непрерывна в некотором интервале, то ее с любой степенью точности можно аппроксимировать полиномом достаточно высокого порядка. Координату точки оптимума функции можно оценивать, находя координату точки оптимума полинома. Качество оценки координаты точки оптимума при этом можно повысить, либо используя полином более высокого порядка, либо уменьшая интервалы аппроксимации. Второй способ более предпочтителен, так как построение аппроксимирующего полинома порядка выше третьего достаточно сложно.
Метод квадратичной аппроксимации.
Метод квадратичной аппроксимации дает существенный эффект в случае, если минимизируемая функция хорошо аппроксимируется на интервалах параболами.
Пусть известны точки

$$x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$$

и значение функции в этих точках: $f_i = f(x_i), i = 1, 2, 3$
Используя эту информацию, можно аппроксимировать нашу функцию на отрезке $[x_1, x_2]$ параболой $g(x) = ax^2 + bx + c$
Параметры этой параболы можно найти, потребовав выполнения условия

$$f(x_i) = g(x_i), i = 1, 2, 3$$

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}(\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{f(x_2 - f(x_1))}{x_2 - x_1});$$

$$b = \frac{x_3 + x_1}{x_3 - x_2}(\frac{f(x_2)f(x_1)}{x_2 - x_1}) - \frac{x_2 + x_1}{x_3 - x_2}\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

удобно использовать также полином в форме

$$q = a_0(x - x_1)(x - x_2) + b_0(x - x_1) + c_0;$$

$$b_0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}; c_0 = f(x_1)$$

Если точность квадратичной аппроксимации на отрезке достаточна высока, то координаты точки оптимума параболы на этом отрезке может служить оценкой точки оптимума нашей функции на этом отрезке

$$x_{min} = \frac{b}{2a} = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{b_0}{2a_0}$$

Аппроксимирующий квадратичный полином также является унимодальной функцией.
Рассмотрим одну схему метода квадратичной аппроксимации [4]
Пусть x_1-начальная точка, $\triangle x$-выбранная величина шага по оси x
Шаг 1. Находим $x_2 = x_1 + \triangle x$
Шаг 2. Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$
Шаг 3. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то находим $x_3 = x_1 + 2\triangle x$ и переход к 4, если $f(x_1) < f(x_2)$, находим $x_3 = x_1 - \triangle x$ к 4
Шаг 4. Вычисление $f(x_3)$, находим $F_{min} = minf(x_1), f(x_2), f(x_3)$,
фиксируем точку $\vec{x}_{min}$, на которой достигается F_{min}
Шаг 5. По известным трем точкам аппроксимируем функцию и находим точку x_{min}
Шаг 6. Проверка на окончание процесса:
а) Является ли разность $|\vec{x}_{min} - x_{min}|$ достаточно малой?

Если оба условия выполняются, закончить процесс, в противном случае переход к 7.
Шаг 7. Выбираем “лучшую” из точек $\vec{x}_{min}$ и x_{min} и две точки по обе стороны. Переход к шагу 4.
Замечание: На шаге можно применять одно из проверочных условий.

МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ

В заключение данной темы рассмотрим весьма простой метод отыскания минимума выпуклой дифференцируемой функции. Напомним, что функция $f(x)$ называется выпуклой на отрезке $[a, b]$, если для произвольных x_1 и x_2 ($a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$), всякого α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) справедливо неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную $f''(x)$, то для того, чтобы функция была выпуклой на этом отрезке, достаточно, чтобы $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (a, b)$.
Этот критерий удобно применять на практике.
Пусть дана выпуклая функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$. Проведем в точках $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ касательные к кривой $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y - f(a) &= f'(a)(x - a)); \\ y - f(b) &= f'(b)(x - b)). \end{aligned}$$

Касательные пересекаются в точке с абсциссой

$$c = \frac{f(b) - f(a) + f'(a)a - f'(b)b}{f'(a) - f'(b)}$$

Из выпуклости следует:
если $f'(c) > 0$, то $x^* \in (a, c)$;
если $f'(c) < 0$, то $x^* \in (c, b)$;
если $f'(c) = 0$, то c является точкой минимума.
Процесс вычислений заканчивается, когда в очередной точке c выполняется условие $|f'(c)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ задано. За приближенное значение точки минимума принимается значение c, т.е. $x^* \approx c$.

Схема метода касательных

1. Проверить выпуклость функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
2. Найти c по известной формуле.
3. Найти $f'(c)$, если $|f'(c)| \leqslant \varepsilon$, то $x^* \approx c$;

$f_{min} \approx f(c)$ и вычисления окончены;
если $f'(c) < -\varepsilon$, то перейти к 5;
если $f'(c) > \varepsilon$, то перейти к 4.
4. Положить $b = c$ найти $f(b)$ ($f'(b)$ - уже нам известно) и перейти к 2.
5. Положить $a = c$ найти $f(a)$ ($f'(a)$ - уже нам известно) и перейти к 2.

Метод касательных применим и в случаях, когда рассматриваемая функция не является дифференцируемой. Мы знаем, что выпуклая функция имеет производные справа и слева во всех внутренних точках отрезка. В концах отрезка в точках a и b существуют производные $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$. В этих случаях метод может быть легко модернизирован с учетом того, что

$$c = \frac{f(a) - f(b) + f'(b-0)b - f'(a+0)a}{f'(b-0) - f'(a+0)}$$

Небольшие модификации необходимо внести в схему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманов В.Г. Математическое программирование. -М.: Наука, 1986.

2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -М.: Наука, 1980.

3. Сборник задач по математике. Специальные курсы. -М.: Наука, 1984.

4. Бэнди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. -М.: Радио и связь, 1988.