Министерство образования РФ
Дальневосточный государственный университет

Задача линейного программирования

Методические указания по курсу "Методы оптимизации"

Владивосток 2003

УДК 519.6

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов 3 и 4 курсов, изучающих дисциплину "Методы оптимизации". В них изложены основные теоретические сведения по линейному программированию, детально разобраны задачи, приведены образцы задач, предлагавшихся на экзаменах в контрольных работах

Подготовлено кафедрой процессов управления.
Составитель Горячев Л.В.
Печатается по решению методического совета ДВГУ.

Задача линейного программирования (ЛП) является наиболее простой среди экстремальных задач с ограничениями. Студент, прослушавший курс "Методы оптимизации", должен хорошо знать свойства таких задач и уверенно владеть методами численного решения.

Однако практические занятия по второму курсу учебной программой не предусмотрены, а те один-два примера, рассмотренные на лекции, вряд ли могут быть достаточными для выработки у студентов твердых навыков. Поэтому необходимость в методическом руководстве для более детального знакомства с численным методом (симплекс-методом) решения задач ЛП очевидна.

Общие свойства ЛП

К рассмотрению темы "Линейное программирование"мы приступаем после знакомства с общей теорией задач выпуклого программирования. поэтому предполагается, что теорема Куна-Таккера и свойства пары двойственных задач выпуклого программирования студентам известны, нам остается лишь кратко напомнить основные свойства задач линейного программирования, доказательства которых легко вытекают из общей теории.

Задача ЛП в достаточно общем виде может быть записана так:

$$(c, x) - max$$

$$Ax = b$$

где

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$	— мерный вектор-столбец коэффициетов
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$	— мерный вектор-столбец неизвестных
$A = (a_{ij}),\ m \times n$	— матрица коэффициентов
$B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$	— вектор-столбец коэффициентов

Однако при решении удобно пользоваться канонической формой задачи:

$$(c, x) - max \tag{1}$$

$$Ax = b \tag{2}$$

$$x \geq 0 \tag{3}$$

где $A = (a_{ij})$ — $(m \times n)$–матрица коэффициентов, $m < n$, ранг $A = m$.

В этом случае мы имеем дело с неотрицательными решениями системы уравнений.

Любая задача ЛП с помощью элементарных преобразований может быть приведена к каноническому виду.

Рассмотрим задачу ЛП в следующем виде:

$$(c, x) - max \tag{4}$$

$$Ax \leq b \text{ – ограничеия-неравенства} \tag{5}$$

$$x \geq 0 \text{ – ограничения неотрицательности} \tag{6}$$

Задачу (4)–(6) можно рассматривать как задачу выпуклого программирования, то есть целевая функция является выпуклой, а многогранное множество допустимых планов выпукло.

Согласно общей теории задача (4)–(6) может быть записана с помощью функций Лагранжа

$$\max_{x \geq 0} \min_{y \geq 0} \left[(c, x) + (y, b - Ax)\right]$$

двойственная к ней имеет вид

$$\min_{y \geq 0} \max_{x \geq 0} \left[(y, b) + (c - A^T y, x)\right]$$

В эквивалентной форме мы можем записать

$$(y, b) - min \tag{7}$$

$$A^T y \geq c \tag{8}$$

$$y \geq 0 \tag{9}$$

Задача (7)–(9) называется двойственной (сопряженной) к задаче (4)–(6), обе они образуют пару двойственных или сопряженных задач в симметричной форме.

Другая пара двойственных задач в симметричной форме может быть получена аналогично.

$$\begin{array}{cc} \text{прямая} & \text{двойственная} \\ (c,x)-\min & (b,y)-\max \\ Ax \geq b & A^T y \leq c \\ x \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

Двойственную задачу к задаче линейного программирования также легко вывести с помощью функции Лагранжа.

$$\begin{array}{cc} (c,x)-\max & (b,y)-\min \\ Ax = b & A^T y \geq c \\ x \geq 0 & \end{array}$$

Каждой задаче ЛП в произвольной форме можно поставить в соответствие двойственную задачу, руководствуясь следующими, достаточно общими правилами:

1. Каждому i – му ограничению типа неравенства или равенства соответствует переменная y_j двойственной задачи и, наоборот, каждому j – му ограничению типа равенства или неравенства двойственной задачи соответствует переменная x_j прямой задачи.

2. Матрица коэффициентов A при переходе к двойственной задаче транспонируется, то есть строка коэффициентов $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ в j – м ограничении двойственной задачи при переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ есть столбец коэффициентов при x_j в ограничениях задачи.

3. Свободные члены ограничений одной из задач являются коэффициентами при соответствующих переменных в целевой функции другой задачи. При этом максимизация (минимизация) меняется на минимизацию (максимизацию).

4. В исходной (прямой) задаче ограничения–неравенства следует записать со знаком "$\leq$" при максимизации и со знаком "$\geq$" при минимизации.

5. Каждому j – му ограничению-неравенству исходной задачи, записанному в соответствии с пунктом 4, отвечает в двойственной задаче условие неотрицательности $y_i \geq 0$, а равенству — переменная y_i без ограничений на знак, то есть произвольная. Наоборот, ограничению неотрицательности на x_j – ю переменную соответствует в двойственной задаче j – е ограничение-неравенство, а произвольной по знаку переменной x_j равенство.

Пример: построить двойственную задачу к следующей:

$$\begin{array}{llllll} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & -\min \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = 6 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -x_4 & +x_5 & \leq 4 \\ x_1 & & +3x_3 & & -4x_5 & \geq 8 \\ x_1 \geq 0 & & x_3 \geq 0 & & x_5 \geq 0 & \end{array}$$

Решение. Прежде чем уступить к построению двойственной задачи с помощью элементарных преобразований в соответствии со сформулированными правилами, приведем задачу к виду

$$\begin{array}{llllll} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & -\min \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = 6 \\ -2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +x_4 & -x_5 & \geq -4 \\ x_1 & & +3x_3 & & -4x_5 & \geq 8 \\ x_1 \geq 0 & & x_3 \geq 0 & & x_5 \geq 0 & \end{array}$$

В таком виде наша задача отличается от задачи (7)–(9) ограничением-равенством и отсутствием ограничения на знак переменных x_2 и x_4. Согласно правилам записи двойственная задача принимает вид:

$$\begin{array}{rrrl} 6y_1 & -4y_2 & +7y_3 & -\ \max \\ y_1 & -2y_2 & +y_3 & \le 1 \\ -2y_1 & -3y_2 & & = -2 \\ y_1 & +2y_2 & +3y_3 & \le 1 \\ 3y_1 & +y_2 & & = -1 \\ 2y_1 & -y_2 & -4y_3 & \le 1 \\ y_2 \ge 0 & & y_3 \ge 0 & \end{array}$$

Условия неотрицательности y_2 и y_3 наложены так, как им отвечают в исходной задаче ограничения-неравенства, а второе и четвертое ограничения имеют вид равенства, так как соответствующие им переменные x_2, x_3 не ограничены по знаку.

Упражнения. Составить двойственные к следующим задачам:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 - \max \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 1 \\ x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{array} & 2. \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + x_3 - \min \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{array} \end{array}$$

Каждая пара двойственных задач обладает рядом интересных свойств. В частности, если рассмотреть пару двойственных задач в симметричной форме, например, задачи (4)–(6), и (7)–(9), то относительно их можно сформулировать следующие утверждения:

1. Для любых допустимых планов x и y прямой и двойственной задач соответственно выполняется неравенство

   $$(c, x) \le (y, b)$$

   Доказательство: $(c, x) \le (A^T y, x) = (y, Ax) \le (y, b)$.

2. Если x^* и y^* — планы прямой и двойственной задачи соответственно и $(c, x^*) = (y^*, b)$, то $x^* = y^*$ — оптимальные планы этих задач.

   Доказательство следует из предыдущего утверждения, так как $(c, x) \le (c, x^*) = (y^*, b) \le (y, b)$.

3. Если линейная форма одной пары двойственных задач неограничена, то множество планов других пусто.

   Доказательство: Пусть для определенности линейная форма задачи (7)–(9) неограниченна снизу, тогда существует последовательность планов $\{y_i\}$ такая, что $\lim(y_k, b) = -\infty$. Учитывая утверждения, заключаем, что прямая задача не имеет ни одного конкретного плана.

4. Если разрешима одна из пары двойственных задач, то разрешима и другая, при этом значения линейных форм задач на оптимальных планах совпадают.

   Доказательство: Опять рассмотрим пару двойственных задач в симметричной форме (4)–(6), и (7)–(9).

   Пусть x^* — оптимальный план прямой задачи. Тогда в m x^* согласно уже известной теореме Куна-Таккера, существуют такие вектора $\lambda \ge 0$, $v \ge 0$, что

   $$\begin{array}{cl} c = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^T \lambda_i - \sum\limits_{j=1}^{n} v_j e_j & \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^T (*) \\ (\lambda, b - Ax^*) = 0 & e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^T \\ (v, x^*) = 0 & v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T \\ & a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \end{array}$$

   учитывая, что $v \ge 0$, имеем $A^T \lambda \ge 0$, то есть вектор λ удовлетворяет условиям двойственной задачи. С другой стороны, умножая $(*)$ на x^* скалярно, будем иметь $(c, x^*) = (A^T \lambda, x^*) = (v, x^*) = (\lambda, b)$. Таким образом, $y^* \equiv \lambda$ есть оптимальный план двойственной задачи.

   Это утверждение вместе с пунктом 3 составляют **первую теорему двойственности**.

Каждому $k-$му ограничению типа неравенства одной из пары двойственных задач отвечает ограничение на знак соответствующей переменной другой задачи и наоборот. Эти пары условий называются сопряженными. Так, для вышеупомянутой пары двойственных задач пару условий $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}b_n \leq b_k$ и $y_k \geq 0$; $\quad x_l \geq 0$ и $a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \cdots + a_{ml}y_m \geq c_l$ будут сопряженными.

5. Если в каждой паре сопряженных условий на оптимальных планах одно условие свободное, то другое — закрепленное.

   Доказательство непосредственно вытекает из условий дополняющей нежесткости теоремы Куна-Таккера.

Следует отметить, что оба сопряженных условия на оптимальных планах могут быть закреплены. Сформулированное утверждение известно как **вторая теорема двойственности**.

Наконец, локализовать точки экстремума линейной формы в задаче ЛП позволяет следующая теорема:

Если задача линейного программирования разрешима, то всегда найдется крайняя точка многогранного множества допустимых планов, в которой достигается экстремум линейной формы.

Доказательство этой теоремы в лекциях получено как следствие свойств выпуклой функции, заданной на многогранном множестве.

Симлексный метод решения задач ЛП

Теорема об экстремуме линейной формы на многогранном множестве предлагает естественный путь построения метода решения задач ЛП, основанного на обходе крайних точек многогранного множества, монотонно изменяя значение линейной формы.

Рассмотрим задачу ЛП в каноническом виде.

$$(c, x) - max \tag{10}$$

$$Ax = b \tag{11}$$

$$x \geq 0 \tag{12}$$

Задача имеет $m+n$ ограничений, среди них m ограничений типа равенства и n ограничений неотрицательности. По определению крайняя точка удовлетворяет n линейно-независимым ограничениям задачи как точным равенствам.

Определение: План $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется опорным, если среди ограничений задачи, которым он удовлетворяет как точным равенствам, имеется n линейно-независимых.

Это определение фактически устанавливает эквивалентность понятий опорного плана и вершины (крайней точки) многогранного множества допустимых планов. Будем предполагать, что опорный план обращает в равенства n ограничений. Такой опорный план называется невырожденным.

Применительно к задаче ЛП в каноническом виде понятие опорного плана можно модифицировать.

Среди n ограничений, обращаемых в равенства опорным планом, m будут обязательных (11) и остальные $m - n$ ограничений на (13) обратятся в точные равенства на опорном плане. Без ущерба для общности изложения допустим, что имеем невырожденный опорный план, который обращает в точные равенства последние $m - n$ ограничения неотрицательности (13). Тогда этому опорному плану отвечает система линейных уравнений с матрицей коэффициентов, составленных из первых m столбцов матрицы A и неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Очевидно, что любому невырожденному плану задачи ЛП канонического вида можно поставить в соответствие m линейно-независимых векторов столбцов матрицы A называемых базисом этого плана. Верно и обратное, любой совокупности m линейно-независимых векторов-столбцов матрицы A, которой отвечает неотрицательное решение системы линейных уравнений, построенной на этих столбцах, отвечает опорный план задачи. Легко видеть, что невырожденный опорный план содержит m положительных компонент. Вырожденный опорный план обращает в точные равенства более, чем n ограничений задачи; он имеет не менее, чем m положительных компонент. Геометрически вырожденность опорного плана означает, что через вершину проходит более, чем n гиперплоскостей. Таким образом, вырожденному опорному плану может отвечать несколько базисов.

Из сказанного следует, что переход от одной вершины к другой равносилен переходу от одного базиса к другому. Сформулируем правила этого перехода.

Итак, пусть мы имеем задачу ЛП канонического вида (10)–(13) и пусть известен ее опорный план $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Не ограничивая общности рассуждений, положим, что он не вырожден и базис его состоит из первых m векторов-столбцов матрицы A. Тогда имеем, что

$$x_1^* A_1 + x_2^* A_2 + \cdots + x_m^* A_m = b \tag{13}$$

$$x_{m+1}^* = x_{m+2}^* = \cdots = x_n^* = 0$$

Обозначим через $B = (A_1, A_2, \dots, A_m)$, тогда из (14)

$$\overline{x^*} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) = B^{-1}b - \sum_{j=m+1}^{n} B^{-1} A_j \, x_j^*$$

Введем обозначения

$$\overline{x_j} = B^{-1} A_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что x_j — вектор коэффициентов разложения вектора A_j по векторам базиса $A_1, A_2, \dots, A_m$.

При этих обозначениях

$$\overline{x^*} = B^{-1}b - \sum_{j=m+1}^{n} X_j \; x_j^*, \qquad x_j^* = 0, \; j = m+1, \dots, n \tag{14}$$

Допустим, что мы переходим к другому опорному плану, который отличается от нашего тем, что одна из базисных компонент замещена переменной x_k $(k > m)$. Это означает, что один из векторов базисного плана $\overline{x^*}$ заменяется на вектор A_k. Тогда из (**??**) мы получаем

$$X = B^{-1}b = B^{-1} A_k \Theta \tag{15}$$

, где Θ — значение x_k, которое мы должны определить. Покомпонентно равенство (15) запишется так:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^* - x_{1k}\Theta \\ x_2 = x_2^* - x_{2k}\Theta \\ \vdots \\ x_m = x_m^* - x_{mk}\Theta \\ x_k = \Theta, \; \Theta > 0 \end{cases} \tag{16}$$

Все оставшиеся $x_j = 0, \quad j \neq 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m, \quad j = k.$

Для того, чтобы план (16) был опорным, необходимо, чтобы общее число ненулевых компонент было равно m (меньше m в случае вырожденности нового опорного плана). Очевидно, что Θ должно удовлетворять условиям

$$x_i = x_i^* - \Theta x_{ik} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_k = \Theta > 0$$

Из этих условий с очевидностью вытекает, что для $\Theta = \Theta_0 = \min\limits_i (x_i / x_{ik})$, при $x_{ik} > 0$ одна из компонент плана (16) обратится в нуль, ее заменит $x_k = \Theta$. Если min достигается только для одного i, то новый опорный план также невырожден, в противном случае будем иметь вырожденный опорный план. Если положить для определенности, что min достигается на $i = l$, то, очевидно, формулы изменения компонент опорного плана при переходе от $A_1, A_2, \ldots, A_{l-1}, A_l, A_{l+1}, \ldots, A_m$ к базису $A_1, A_2, \ldots, A_l, A_k, A_{l+1}, \ldots, A_m$ имеют вид

$$\begin{cases} x_i = x_i^* - \dfrac{x_l^*}{x_{lk}} x_{ik} \\ x_k' = \dfrac{x_l^*}{x_l k} \end{cases}$$

При переходе к новому базису изменяются и коэффициенты разложения вектора A_j по векторам базиса. Как это происходит, видно из следующих тривиальных преобразований. Для нашего случая при базисе, состоящем из первых m векторов, имеем

$$A_j = x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \cdots + x_{lj}A_l + \cdots + x_{mj}A_m \tag{17}$$

в том числе для $j = k$

$$A_k = x_{1k}A_1 + x_{2k}A_2 + \cdots + x_{lk}A_l + \cdots + x_{mk}A_m$$

. Отсюда

$$A_l = \frac{1}{x_{lk}}(A_k - \sum_{i=l} x_{ik}A_i)$$

и подставляя в (17), получаем разложение A_j по векторам нового базиса $A_1, \ldots, A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, \ldots, A_m$.

$$A_j = (x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}})A_1 + \cdots + \frac{x_{lj}}{x_{lk}}A_k + \cdots + (x_{mj} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}})A_m$$

Таким образом, формулы пересчета коэффициентов разложения имеют вид

$$\begin{cases} x_{ij}' = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ij}, \qquad i \neq k \\ x_{kj} = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} \end{cases}$$

Здесь штрих обозначает компоненты нового вектора коэффициентов разложения вектор-столбца A_j. Замена одного базисного вектора A_l на другой вектор геометрически означает переход от одной крайней точки (вершины) к другой. Однако, такой переход должен быть направленным, то есть должен вести к уменьшению линейной формы. Рассмотрим, как осуществить выбор вектора A_k, включаемого в базис, чтобы это привело к уменьшению значения целевой функции.

Для этого достаточно проследить, как изменяется значение линейной формы при смене базиса. Используя формулы перехода от одного опорного плана к другому, можно легко получить, что на новом опорном плане x'

$$(c, x') = (c, x^*) - \Theta_0(c^0, x_k) + \Theta_0 c_k = (c, x^*) - \Theta_0(z_k - c_k)$$

где $z_k = \sum_{i=1}^m c_i x_{ik} = (c^0, x_k)$. Вообще говоря, Θ_0 зависит от индекса k, пренебрегая этой зависимостью, мы видим, что в базис необходимо вводить вектор A_k, для которого

$$z_k - c_k = \max_j (z_j - c_j), \qquad z_j - c_j > 0 \tag{18}$$

Вообще говоря, в базис можно вводить и любой другой вектор A_j, для которого $z_j - c_j > 0$, но при таком выборе значение линейной формы уменьшается наиболее быстро.

Правило выбора вектора a_l, замещаемого в базисе вектором A_k, мы уже вывели: l определяется индексом i, на котором достигается

$$\min_i \frac{x_i^*}{x_{ik}} = \frac{x_l^*}{x_{lk}} = \Theta_0$$

Если min достигается для нескольких l, то можно взять за l любое из них.

Из (18) с очевидностью вытекает признак оптимальности опорного плана.

Теорема: Если для некоторого опорного плана $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ справедливо $z_j - c_j \leq 0$, $j = \overline{1,n}$, то x^* — оптимальный опорный план.

Доказательство теоремы дается в лекциях. Нетрудно показать при решении задачи канонического вида на максимум, критерием оптимальности будут условия $z_j - c_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$.

При решении практической задачи, как правило, заранее неизвестно разрешима она или нет. Это может быть обнаружено в ходе решения. В симплекс-методе достаточно просто может быть обнаружена неограниченность линейной формы на множестве допустимых планов. Из условия (7) вытекает, если для данного вектора $A_p: \ z_p - c_p > 0$ и всех $x_{ip} \leq 0$, то величина Θ сверху неограничена. При любом $\Theta > 0$ вектор X с отличными от нуля компонентами, вычисляемыми по (8), будет планом. Тогда значение линейной формы на этом плане будет

$$(c, x) = (c, x^*) - \Theta(z_p - c_p)$$

откуда с очевидностью следует, что $(c, x) \to \infty$ при $\Theta \to \infty$. Таким образом, если среди внебазисных векторов A_j, для которых $\Delta_j = z_j - c_j > 0$, найдется вектор, для которого вектор коэффициентов разложения x_j неположителен, то линейная форма задачи (10)–(13) неограниченна сверху.

Упражнение: сформулировать аналогичное утверждение для случая максимизации целевой функции.

Схема симплекс-метода

шаги 0. Построение начального опорного плана.

1. Вычисление величин $\Delta_j = z_j - c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$.

2. Проверка опорного плана на оптимальность: если $\Delta_j = z_j - c_j \leq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то переход к пункту 7, в противном случае к пункту 3.

3. Находим вектор A_{l_0}, подлежащий исключению из базиса:

$$\Theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ik}}, \qquad x_{ik} > 0$$

если min достигается для нескольких i, то выберем наименьшее из них.

4. Пересчитаем коэффициенты опорного плана по формулам

$$\begin{cases} x_i' = x_i^* - \dfrac{x_i^*}{x_{lk}} x_{ik} \\ x_k' = \dfrac{x_l^*}{x_{lk}} \end{cases}$$

Пересчитаем вектора коэффициентов разложения для всех базисных векторов A_j:

$$\begin{cases} x_{ij}' = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ij}, \qquad i \neq k \\ x_{kj} = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} \end{cases}$$

5. Переход к шагу 1.

6. Оформление окончательного результата, конец.

Реализовать симплекс-метод удобно в виде последовательности таблиц, первая из которых имеет вид

x^0	b^0	c^0	c_1 x_1	$\dots$ $\dots$	c_l x_l	$\dots$ $\dots$	c_m x_m	c_{m+1} x_{m+1}	$\dots$ $\dots$	c_n x_n
x_1	b_1	c_1	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$a_{1\,m+1}$	$\dots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_l	b_l	c_l	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$a_{l\,m+1}$	$\dots$	a_{ln}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	b_m	c_m	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$a_{m\,m+1}$	$\dots$	a_{mn}
		(c,x^0)	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	$\dots$	z_n-c_n

Таблица составлена при условии, что первые m столбцов матрицы условий A, образующие базис, являются единичными. Поэтому вектора x_j коэффициентов размножения оставшихся векторов A_j совпадают с ними и заполняют таблицу.

Фактически исходная таблица содержит все условия задачи, элемент $z_j - c_j$ $m+1-$ой строки есть разность между скалярным произведением вектора столбца c^0 на столбец x_j и коэффициентом линейной формы при ней.

Решение задачи ЛП заключается в последовательном преобразовании этой таблицы по вышеуказанным формулам. Эти преобразования полностью соответствуют преобразованиям при решении системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

Рассмотрим пример на применение симплекс-метода к задаче ЛП канонического вида, имеющей единичный базис:

$$\begin{array}{lcl} x_1{+}x_2{+}x_3 & - & min \\ x_1 \qquad -x4 \qquad -2x_6 & = & 5 \\ \qquad x_3{-}2x_4{-}5x_5{+}6x_6 & = & 5 \\ x_j \geq 0, \qquad j=1,2,3,4,5,6 & & \end{array}$$

Легко видеть, что вектора A_1, A_2, A_3 образуют базис, которому отвечает опорный план $x^0 = (5,3,5,0,0,0)$. Исходная таблица

b	x^0	c^0	x_1^1	x_2^1	x_3^1	x_4^0	x_5^0	x_6^0
x_1	2	1	1	0	0	-1	0	-2
x_2	3	1	0	1	0	2	-3	7
x_3	5	1	0	0	1	-2	-5	6
		13	0	0	0	-1	-8	5

Вектор A_k, вводимый в базис, определяется $z_k - c_k = \max\{3,5\} = z_6 - c_6 = 5$. Значит столбец A_6 надо ввести в базис. Определим столбец A_l, исключаемый из базиса, для этого находим

$$\min_i \frac{x_i^0}{x_{ik}} = \min\{\frac{3}{1}, \frac{5}{6}\} = \frac{x_3}{x_{36}} = \frac{5}{6}$$

Значит вектор A_3 заменяется на вектор A_6, а базисная переменная x_3 на x_6. Ведущий элемент: $x_{36} = 6$ отмечен. Выполняем операцию исключения x_6 из первого и второго уравнения, а в третьем — коэффициент при x_6 делаем равным единице. Следующая таблица имеет вид (Таблица 1):

		c^0	x_1^1	x_2^2	x_3^1	x_4^0	x_5^0	x_6^0
x_1	40/6	1	1	0	2/6	$-2/6$	$-10/6$	0
x_1	13/6	1	0	1	$-1/6$	10/6	$-13/6$	0
x_6	5/6	0	0	0	1/6	$-2/6$	$-5/6$	1
		58/6	0	0	$-5/6$	8/6	$-23/6$	0

опорный план $x^1 = (40/6, 13/6, 0, 0, 0, 5/6)$

Теперь снова находим столбец, включаемый в новый базис. Среди всех $z_j - c_j$ только $z_4 - c_4 = 8/11$ положительно, следовательно, вектор вводится в базис. Вектор, исключаемый из базиса, находится отыскиванием

$$\min\left\{\frac{x_2}{x_{24}}, \frac{x_6}{x_{64}}\right\} = \min\left\{\frac{13}{10}, \frac{5}{2}\right\} = \frac{13}{10}$$

Вектор A_2 и переменная x_2 заменяются на A_4 и x_4 соответственно. (Таблица 2):

		c^0	x_1^1	x_2^2	x_3^1	x_4^0	x_5^0	x_6^0
x_1	$7/10$	1	1	$2/10$	$3/10$	0	$-2/10$	0
x_4	$13/10$	0	0	$6/10$	$-1/10$	1	$-13/10$	0
x_6	$4/10$	0	0	$-2/10$	$2/10$	0	$-4/10$	1
	$7/10$	0	0	$-8/10$	$-7/10$	0	$-2/10$	0

$$\text{опорный план } x^2 = (71/10, 0, 0, 13/10, 0, 4/10)$$
$$(c, x^2) = 71/10$$

как мы видим из таблицы, все элементы $z_j - c_j < 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Значит, полученный нами план $x^2 = (71/10, 0, 0, 13/10, 0, 4, 10)$ является оптимальным. Решение закончено.

Если ограничения-неравенства в задаче ЛП имеют вид "$\leq$", то мы приводим задачу к каноническому виду, вводя в каждое такое ограничение неотрицательную дополнительную переменную, в результате единичный базис возникает естественным образом. Рассмотрим задачу:

$$2x_1 + 7x_2 - \max$$
$$-2x_1 + 3x_2 \leq 14$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Вводя дополнительные переменные, приходим к канонической задаче

$$2x_1 + 7x_2 - \max$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

В задачах на максимум для оптимальности опорного плана достаточно, чтобы $z_j - c_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$.

Таблица 0:

		c^0	x_1^1	x_2^2	x_3^1	x_4^0
x_3	14	0	-2	3	1	0
x_4	8	0	1	1	0	1
		0	-7	-7	0	0

$$\text{опорный план } x^0 = (0, 0, 14, 8)$$
$$(c, x^0) = 0$$

Вектор, подлежащий в базис, находим, определяя

$$\min\{-2, -7\} = z_2 - c_2 = -7$$

Вектор, исключаемый из базиса, определяется нахождением

$$\min\left\{\frac{x_3}{x_{32}}, \frac{x_4}{x_{42}}\right\} = \min\left\{\frac{14}{3}, \frac{8}{1}\right\} = \frac{x_3}{x_{32}} = \frac{14}{3}$$

Следовательно, вектор A_3 в базисе заменяется на вектор A_2, а переменная x_3 на x_2. Таблица 1.

		c^0	x_1^1	x_2^2	x_3^1	x_4^0
x_2	$14/3$	0	$-2/3$	1	$1/3$	0
x_4	$10/3$	0	$5/3$	0	$-1/3$	1
		$98/3$	-2	0	$7/3$	0

$$\text{опорный план } x^1 = (0, 14/3, 0, 10/3)$$
$$(c, x^1) = 98/3$$

Мы видим, что критерий оптимальности опорного плана не выполняется, так как $z_1 - c_1 < 0$. Следовательно, вектор A_1 вводится, а вектор A_4 выводится из базиса. Переменная x_4 меняется на x_1. Таблица 2.

		c^0	x_1^1	x_2^2	x_3^1	x_4^0
x_2	6	7	0	1	1/5	2/5
x_1	2	2	1	0	−1/5	3/5
		40	0	0	1	4

опорный план $x^2 = (2, 6, 0, 0)$

Так как все $z_j - c_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, то полученный опорный план оптимален.

Искусственный базис

Как мы уже убедились, удобно начинать решение задачи, когда она имеет базис, составленный из m единичных векторов. В этом случае в исходной таблице $x_j = \begin{pmatrix} x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2_{ij} \\ \vdots \\ 2_{mj} \end{pmatrix} = A_j$, $j = \overline{1, n}$. Однако многие задали ЛП либо не содержат единичных векторов, либо содержат, но их меньше m. В этом случае пользуются искусственным базисом. Допустим, что имеем задачу ЛП канонического вида:

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - \min \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Если среди векторов-столбцов матрицы A нет единичных, мы вводим в каждое $i-$е уравнение искусственную переменную x_{n+i} с коэффициентом $\omega > 0$ в линейной форме, который можно не фиксировать, считая его очень большим.

Таким образом, приходим к расширенной задаче

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + \omega x_{n+1} + \dots + \omega x_{n+m} - \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m \end{aligned}$$

Векторы $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n_m}$ при искусственных переменных образуют единичный базис, называемый искусственным. Если исходиная задача имеет допустимые планы, то применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечит построение опорного плана, то есть в ним все искусственные переменные будут равны нулю и в дальнейшем будут исключены из процесса решения. Если же исходная задача не имеет допустимых планов (то есть условия задачи несовместны), то решение расширенной задачи будет содержать по крайней мере одну искусственную переменную, отличную от нуля.

Начальным опорным планом будет расширенный вектор

$$x^0 = (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

Значение линейной формы $z_0 = \omega \sum b_i$, а $z_j - c_j = \omega \sum_{i=1}^m x_{ij} - c_j$, $\quad j = 1, 2, \dots, n$.

Всякий раз, когда в базисе будут содержать искусственные векторы, разности $z_j - c_j$ будут линейными функциями ω. Каждая из разностей $z_j - c_j$ состоит из двух слагаемых, одно из который зависит от ω, а другое — нет. Решение расширенной части задачи осуществляется с помощью таблиц, которые отличаются от аналогичных таблиц в первом случае тем, что $z_j - c_j$ приписывается в двух строках $(m+1)$ и $(m+2)$.

Для каждого j в $(m+1)$ и $(m+2)$ строки помещаются соответственно коэффициенты $z_j - c_j$ при 1 и ω. Вектор, вводимый в базис, определяется наибольшим положительным элементом $(m+2)$ строки. Это же правило действует и в задачах на максимизацию. Очевидно, что на первой итерации в базис вводится вектор, соответствующий $\max\limits_j \sum\limits_i x_{ij}$. Элементы $(m+1)$ и $(m+2)$ строк также преобразуются по правилу исключения Гаусса.

Искусственный вектор, исключенный из базиса на некоторой итерации, вычеркивается из таблицы. Следует заметить, что возможна ситуация, на которой на текущей итерации ни один из искусственных векторов базиса не исключается.

Руководствуясь элементами $(m+2)$ строки как критерием, продолжают отбирать вектора для введения в базис до тех пор, пока либо все искусственные векторы не будут исключены из базиса, либо $(m+2)$ строка не будет больше содержать положительных элементов в столбцах, отвечающих переменным.

В первом случае все элементы $(m+2)$ строки равны нулю и соответствующий базис отвечает некоторому опорному плану исходной задачи. После этого решение продолжается до получения оптимального плана. Во втором случае. искусственные векторы находятся в базисе, и, следовательно, искусственные переменные присутствуют в опорном плане.

Если при этом хотя бы одна из искусственных переменных отлична от нуля, то исходная задача не имеет допустимых планов, то есть условия несовместимые. Если уже во втором случае все искусственные переменные опорного плана равны нулю, то при последующих итерациях в базис вводится вектор, соответствующий максимальному положительному элементу, находящемуся под нулевым элементом $(m+2)$ строки. Этот процесс заставляет искусственные переменные, все еще находящиеся в опорном плане, оставаться равными нулю и ведет к уменьшению значения линейной формы. Применять это правило следует до получения оптимального плана, то есть пока среди элементов $(m+1)$ строки, расположенных над нулевыми элементами $(m+2)$ строки, больше не останется положительных, при этом элементы $(m+2)$ строки преобразовывать не следует.

Как в первом, так и во втором случае, все элементы $(m+2)$ строки неположительны, за исключением элемента $(m+2, 0)$, где находится значение линейной формы на данном опорном плане.

Если исходная задача содержит несколько единичных векторов, то они должны быть включены в базис, и число искусственных векторов будет меньше. Рассмотрим пример

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 - \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_4 - 2x_5 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 6 \\ x_j \geq 0, \qquad j &= \overline{1,5} \end{aligned}$$

Среди вектор-столбцов матрицы ограничений есть единичный вектор $A_3 = (0,1,0)^T$, поэтому вводим только два искусственных вектора $A_6 = (1,0,0)^T$ и $A_7 = (0,0,1)^T$ с искусственными переменными x_6, x_7. Расширенная задача имеет вид:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & +\omega x_6 & +\omega x_7 & - \min \\ 2x_1 & -x_2 & & -2x_4 & -2x_5 & +x_6 & & =4 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & =8 \\ x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & +3x_5 & & +x_7 & =6 \\ \end{array}$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,7}$$

Исходная таблица задачи. Таблица 0.

	b^0	c^0	x_1^1	x_2^2	x_3^{-2}	x_4^1	x_5^1	x_6^ω	x_7^ω
x_6	4	ω	2	-1	0	-2	-1	1	0
x_3	8	-2	-1	2	1	1	0	0	0
x_7	6	ω	1	-2	0	2	3	0	1
		-16	1	-6	0	-3	-3		
		-10	3^*	-3	0	0	1		

Для выбора вектора, вводимого в базис, сравниваем положительные элементы $(m+2)$ строки (коэффициенты при ω в $z_j - c_j$, $\omega > 0$). Максимальный элемент отмечен "$*$", следовательно, в базис вводится вектор A_1. Для выбора вектора, выводимого из базиса, находим $\min\left\{\dfrac{x_6}{x_{61}}, \dfrac{x_7}{x_{71}}\right\} = \left\{\dfrac{4}{2}, \dfrac{6}{1}\right\} = \dfrac{x_6}{x_{61}} = 2$. Таким образом, искусственный вектор A_6 заменяется на вектор A_1, искусственная переменная x_6 заменяется в опорном плане на x_1. Проводится пересчет таблицы по правилу исключения x_1 из первого и третьего уравнений. Таблица 1.

	b^0	c^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
x_1	2	1	1	$-1/2$	0	-1	-1	0
x_3	10	-2	0	$3/2$	1	0	-1	0
x_7	4	ω	0	$-3/2$	0	3	4^*	0
		-18	0	$-1/2$	0	-2	0	0
		-4	0	$-3/2$	0	3	4^*	0

В последней строке выбираем максимальную величину среди положительных. Она соответствует столбцу A_5, следовательно, вектор A_5 включается в базис вместо A_7 (в столбце x_5 единственный положительный элемент). Вообще говоря, в базис можно было ввести и A_4. Таблица 2.

	b^0	c^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	3	1	1	$-7/8$	0	$-1/4$	0
x_3	11	-2	0	$9/8$	1	$3/4$	0
x_5	1	1	0	$-3/8$	0	$3/4$	0
		-18	0	$-1/2$	0	-2	0

Все искусственные векторы (переменные) исключены, получен исходный опорный план $x^0 = (3, 0, 11, 0, 5)$, при этом все величины $z_j - c_j \le 0$, значит, полученный опорный план будет оптимальным. Значение формы равно -18. Задача решена.

Рассмотрим еще один пример:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & & x_4 & +x_5 & -\max \\
 & 2x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & \ge 0 \\
-2x_1 & & +2x_3 & -x_4 & +x_5 & \ge 0 \\
x_1 & -2x_2 & & -x_4 & +x_5 & \ge 0 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & =1 \\
\end{array}
$$
$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,5}$$

Приведем задачу к каноническому виду, для этого от левых частей первых трех неравенств отнимем дополнительные переменные x_6, x_7, x_8 соответственно. Задача примет вид

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & & & x_4 & +x_5 & & & & -\max \\
 & 2x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & -x_6 & & & \ge\ 0 \\
-2x_1 & & +2x_3 & -x_4 & +x_5 & & -x_7 & & \ge\ 0 \\
x_1 & -2x_2 & & -x_4 & +x_5 & & & -x_8 & \ge\ 0 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & & =\ 1 \\
\end{array}
$$
$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,8}$$

Уже видно из условий задачи, единичные вектора-столбцы отсутствуют. Однако единичный базис можно получить, умножив первые три уравнения на -1, а в последнее ввести искусственную переменную x_9. После этих простейших преобразований имеем расширенную задачу

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & & & x_4 & +x_5 & & & & +10x_9 & -\max \\
 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & +x_6 & & & & =0 \\
2x_1 & & -2x_3 & +x_4 & -x_5 & & +x_7 & & & =0 \\
-x_1 & +2x_2 & & +x_4 & -x_5 & & & +x_8 & & =0 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & & & =1 \\
\end{array}
$$
$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,9}$$

Решение задачи проводится в последовательности таблиц. Таблица 0.

	b^0	c^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_6	0	0	0	−2	1	1	−1	1	0	0	0
x_7	0	0	2^*	0	−2	1	−1	0	1	0	0
x_8	0	0	−1	2	0	1	−1	0	0	1	0
x_9	1	ω	1	1	1	0	0	0	0	0	1
		0	0	0	0	−1	1	0	0	0	0
		1	1^*	1	1	0	0	0	0	0	0

Коэффициент ω — отрицательная, достаточно большая по абсолютной величине величина. Как видно из $m+2$ строки, на ввод в базис претендуют вектора A_1, A_2, A_3, мы выберем A_1. Вектор, исключаемый из базиса, определяется $\min\left\{\dfrac{x_7}{x_{71}}, \dfrac{x_8}{x_{81}}\right\} = \{0,1\} = \dfrac{x_7}{x_{71}} = 0$. Таблица 1.

	b^0	c^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_6	0	0	0	−2	1^*	1	−1	1	0	0	0
x_1	0	0	0	0	−1	1/2	−1/2	0	1/2	0	0
x_8	0	0	0	2	−1	3/2	3/2	0	1/2	1	0
x_9	1	ω	0	1	2	−1/2	1/2	0	−1/2	0	1
		0	0	0	0	−1	1	0	0	0	0
		0	0	1	2	−1/2	1/2	0	1/2	0	0

Отметим, что дополнительные переменные в случае их исключения из опорного плана остаются в таблице. Таблица 2.

	b^0	c^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_3	0	0	0	−2	1	1	−1	1	0	0	0
x_1	0	0	1	−2	0	3/2	−3/5	1	1/2	0	0
x_8	0	0	0	0	0	5/2	−5/2	1	1/2	1	0
x_9	1	ω	0	5^*	0	−5/2	5/2	2	−1/2	0	1

В базис вводим A_2 вместо A_9. Таблица по-прежнему содержит искусственный вектор (переменную). На очередной итерации он исключается. Таблица 3.

	b^0	c^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	2/5	0	0	0	1	0	0	1/5	1/5	0
x_1	2/5	0	1	0	0	$1/2^*$	1/2	1/5	8/10	0
x_8	0	0	0	0	0	5/2	5/2	1	1/2	1
x_2	1/5	0	0	1	0	−1/2	1/2	2/5	1/10	0
		0	0	0	0	-1^*	1	0	0	0

В базис вводится вектор A_4 вместо вектора A_1. Таблица 4.

	b^0	c^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_3	2/5	0	0	0	1	0	0	1/5	1/5	0
x_4	2/5	1	2	0	0	1	−1	2/5	3/5	0
x_8	2/5	0	−1	0	0	0	0	−4/5	−9/5	1
x_2	3/5	0	1	1	0	0	0	0	2/10	0
		2/5	2	0	0	0	0	2/5	3/5	0

Элементы последней строки свидетельствую об оптимальности опорного плана. Выпишем его $x_{\text{опт}} = (0, 3/5, 2/5, 2/5, 0)$, $\quad (c, x_{\text{опт}}) = 2/5$.

В качестве упражнений предлагаем решить следующие задачи:

$$\begin{array}{c}
-3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - \min \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\
x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4 \\
\text{Ответ } x = (1,1,3,0)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
-2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - \min \\
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\
2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 6 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\
x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4 \\
\text{Ответ } x = (3,0,1,3)
\end{array}$$

$$\begin{gathered} x_1+2x_2+3x_3-\max \\ 2x_1+2x_2-x_3\geq 2 \\ x_1-x_2-4x_3\leq -3 \\ x_1+x_2-2x_3\geq 6 \\ 2x_1+x_2-2x_3\geq 3 \\ x_j\geq 0,\quad j=1,2,3, \\ \text{Ответ } x=(3/2,9/2,0) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1-x_2+x_3+x_4+x_5-x_6-\min \\ 2x_1+x_4+6x_6=9 \\ 3x_1+x_2-x_4+2x_6=2 \\ x_1+2x_3+x_5+2x_6=6 \\ x_j\geq 0,\quad j=1,2,3,4,5,6 \\ \text{Ответ } x=(0,5,3/2,0,0,3/2) \end{gathered}$$

Приведем просты примеры из числа тех, которые предлагались на экзаменах и контрольных работах.

$$\begin{gathered} x_1+10x_2+8x_3-\max \\ x_1+4x_2+x_3=2 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_j\geq 0,\quad j=1,2,3 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 3x_1+x_2+x_3+x_4-\min \\ -2x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1+x_2+x_4=6 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3,4 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 4x_1-x_2-x_3+x_4-\min \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-x_2-x_3+3x_4=2 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3,4 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 2x_1+8x_2+2x_3-\max \\ 4x_1-x_2+3x_3\leq 7 \\ 7x_1+5x_2+12x_3=19 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1+x_2+x_3+x_4\max \\ x_1+3x_2+x_3+x_4=5 \\ 2x_1-x_3+x_4=1 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3,4 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1-3x_2+x_3-min \\ x_1+4x_2+3x_3\leq 12 \\ -x_1+2x_2-2x_3\leq 4 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1+x_2+x_3+x_4-\max \\ x_1+3x_2+7x_3-x_4=6 \\ x_1-x_2-x_3+3x_4=2 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3,4 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1+4x_2-x_3-\max \\ x_1-x_2+x_3=3 \\ 2x_1-5x_2-x_3=1 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1+7x_2-x_3-\max \\ x_1-x_2-2x_3=-1 \\ x_1+2x_2+13x_3=14 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1-2x_2-4x_3-\max \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \\ 5x_1+6x_2+x_3=20 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1-2x_2+3x_3-\min \\ -2x_1+x_2+3x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=1 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 2x_2+x_2-x_3-x_4-\min \\ x_1+x_2-2x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4=6 \\ x_1+x-2+x_3+x_4=7 \\ x_j\geq 0, j=1,2,3,4 \end{gathered}$$