Содержание

Вместо предисловия

Две основные причины побудили меня написать это учебное пособие. Многие годы чтения курса по прикладному функциональному анализу выявили необходимость того, чтобы студенты имели лаконичное пособие, максимально автономное и предназначенное, в первую очередь, для интенсивного практикума. Кроме того, в процессе консультаций с инженерами и физиками, обращавшимися ко мне за советами по поводу трудностей, с которыми они сталкивались при решении возникавших перед ними задач, выяснилось, что инженеру, не являющемуся профессиональным математиком и желающему строго обосновать предлагаемый им способ решения практической задачи, необходимо ознакомиться с современным математическим аппаратом, по крайней мере с основами функционального анализа. Этот раздел математики содержит много новых для нематематика абстрактных понятий, которые нельзя усвоить второпях. Таким образом, возникла идея подготовки учебного пособия, содержащего теоретические сведения по функциональному анализу, которые можно глубже усвоить с помощью упражнений и контрпримеров. Литература по функциональному анализу достаточно обширна, но представлена она, в основном, "толстыми" книгами известных авторов, изданными давно, и практически отсутствующими в библиотеках вузов. Данное пособие призвано восполнить указанный пробел. Оно является первой частью серии пособий по прикладному функциональному анализу, над которой работает автор. В дальнейшем предполагается рассмотреть теорию линейных функционалов и ее приложения, теорию линейных и нелинейных операторных уравнений, экстремальные задачи в гильбертовых пространствах и приложения функционального анализа к задачам оптимального управления.

Александр Чеботарев

Владивосток, 2000

1. Метрические, нормированные и гильбертовы пространства

1.1. Что такое метрика?

Определение 1. *Если каждой паре элементов x, y некоторого множества X поставлено в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$, называемое* расстоянием *между элементами x и y так, что*
1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ $\forall x, y, z \in X$,
то множество X называется метрическим пространством *с метрикой $\rho(x, y)$.*

Свойство 1 называется аксиомой тождества, а свойство 2 аксиомой треугольника.

Пример 1.1. *Показать, что из аксиом 1, 2 вытекает свойство (аксиома симметрии) 3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$ $\forall x, y \in X$.*

Решение. Положим в аксиоме треугольника $z = x$. Тогда из аксиомы тождества вытекает $\rho(x, y) \leq \rho(y, x)$ $\forall x, y \in$ X. Меняя местами x и y получаем симметричность метрики. Если в аксиоме 2 положить $y = x$ получим неотрицательность метрики. ■

Метрическое пространство определяется выбором множества X и метрики ρ; одно и то же множество может порождать различные метрические пространства при введении различных метрик. Элементами метрического пространства могут быть объекты различной природы: числа, векторы, функции, студенты (если смоделировать группу студентов как некоторое множество) и т. п. Эти элементы называются *точками* метрического пространства.

Пример 1.2. *Пусть X — произвольное множество. Доказать, что формула*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \textit{при } x = y, \\ 1 & \textit{при } x \neq y \end{cases}$$

определяет метрику на X (X – дискретное пространство*).*

Решение. Выполнение аксиомы 1 очевидно. Проверим справедливость неравенства треугольника. Последнее не выполняется, если $\rho(x, y) = 1, x \neq y$, а при этом $\rho(x, z) + \rho(y, z) = 0$. Однако последнее возможно если только $\rho(x, z) = \rho(y, z) = 0$ и тогда $x = z$ и $y = z$, что противоречит условию $x \neq y$. ■

Пример 1.3. *Пусть $\rho(x, y)$ — метрика на X. Доказать, что функции*

1. $\rho_1(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$,

2. $\rho_2(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$,

3. $\rho_3(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$

также являются метриками.

1.2. Примеры метрических пространств

1. *Евклидово пространство размерности $n \geq 1$:*

$$\mathbb{R}^n = \Big\{ x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \ \ x_k \in \mathbb{R}, \ \ k = \overline{1, n}, \quad \rho(x, y) = \Big(\sum_1^n (x_i - y_i)^2 \Big)^{1/2} \Big\}.$$

2. *Пространство p-суммируемых последовательностей*:

$$l_p = \left\{ x : x = (x_1, x_2, \ldots), \ \sum_1^\infty |x_i|^p < \infty, \right.$$
$$\left. \rho(x,y) = \left(\sum_1^\infty |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \ p \geq 1 \right\}.$$

3. *Пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций*:

$$C[a,b] = \left\{ x = x(t), \ t \in [a,b] \text{ – непрерывная функция}, \right.$$
$$\left. \rho(x,y) = \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)| \right\}.$$

4. *Пространство Лебега с показателем p*:

$$L^p(a,b) = \left\{ x = x(t), \ t \in (a,b), \right.$$

где $x(t)$ — измеримая на (a,b) функция, интегрируемая по Лебегу со степенью $p \geq 1, \rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \right)^{1/p} \Bigg\}$.

Упражнение 1.1. *Проверить справедливость аксиом метрики для пространств $\mathbb{R}^n$, l_p, $C[a,b]$, $L^p(a,b)$.*

Упражнение 1.2. *Проверить справедливость аксиом метрики $\rho(x,y) = \sup\limits_{t \in T} |x(t) - y(t)|$ для множества $M(T)$ всех ограниченных функций, определенных на множестве T.*

Пример 1.4. *Каким условиям должна удовлетворять функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$?*

Решение. Аксиома треугольника справелива, очевидно, для произвольной функции f. Для справедливости аксиомы тождества необходимо и достаточно, чтобы из условия $f(x) = f(y)$ вытекало $x = y$, т.е. чтобы функция f была обратимой.■

1.3. Множества в метрических пространствах

1. *Открытый шар:* $B(a,r) = \{x \in \mathrm{X} : \rho(x,a) < r\}$.
2. *Замкнутый шар:* $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathrm{X} : \rho(x,a) \leq r\}$.
3. *Ограниченное множество* M*:* существует шар $B(a,r)$, такой, что $M \subset B(a,r)$; число $\mathrm{diam}\ M = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in M\}$ называется *диаметром* M; числа $\rho(x,M) = \inf\{\rho(x,y) : y \in M\}$, $\rho(M,K) = \inf\{\rho(x,y) : x \in M, y \in K\}$ называются *расстоянием от точки x до множества M* и *расстоянием между множествами M и K* соответственно.

4. *Открытое множество* $M \subset$ X: $\forall x \in M\ \exists r > 0\ B(x, r) \subset M$, т. е. любая точка множества M является *внутренней точкой* и, значит, содержится в M вместе с некоторым шаром. Для множества $M \subset X$ точка $a \in$ X называется *предельной точкой* этого множества, если в любом шаре $B(a, r), r > 0$ найдется точка $x \in M, x \neq a$; точка $a \in M$ называется *изолированной* точкой множества M, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B(a, \varepsilon) \bigcap M = \{a\}$. *Замыканием* множества M называется множество $\overline{M}$, полученное присоединением к M всех его предельных точек.

5. *Замкнутое множество* $M \subset$ X: $\overline{M} = M$.

6. Множество $M \subset K$ *плотное* в множестве K : $K \subset \overline{M}$. В частности, множество M называется *всюду плотным* в пространстве X, если $\overline{M} =$ X; M *нигде не плотно*, если каждый шар пространства X содержит в себе некоторый шар, свободный от точек M.

7. Пространство X называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное множество.

8. *Граница* ∂M множества M:
$\partial M = \{x \in \mathrm{X} : \forall \varepsilon > 0, M \bigcap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset, (\mathrm{X} \setminus M) \bigcap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}$.

Упражнение 1.3. *Доказать*

1. $\overline{M \bigcup N} = \overline{M} \bigcup \overline{N}$*;*

2. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Упражнение 1.4. *Доказать, что граница ∂M замкнутое множество и при этом $\partial M = \partial(X \setminus M)$.*

Упражнение 1.5. *Пусть $A, B \subset X$ – замкнутые множества, $A \bigcap B = \emptyset$. Возможно ли, что $\rho(A, B) = 0$?*

1.4. Сходимость и полнота

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X называется:

1. *сходящейся* к элементу $x \in$ X, если числовая последовательность $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, ($x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to x$);

2. *фундаментальной*, если $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Пример 1.5. *Доказать, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Решение. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x. Тогда на основании неравенства треугольника заключаем, что

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) \to 0.$$

Последнее означает фундаментальность последовательности. ■

Определение 2. *Метрическое пространство называется* полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.*

Одно и то же множество с разными метриками может порождать полное или неполное метрическое пространство. Пространство будет полным тогда и только тогда, когда для последовательности замкнутых множеств, вложенных друг в друга, диаметры которых стремятся к нулю, всегда найдется единственная точка, принадлежащая всем этим множествам.

Упражнение 1.6. *Доказать, что фундаментальная последовательность ограничена.*

Упражнение 1.7. *Пусть* $x_n \in X$ *и числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1})$ *сходится. Доказать, что* $\{x_n\}$ *фундаментальная. Верно ли обратное?*

Замечание. Пространства, приведенные в п. 1.2 , являются полными. Примером неполного метрического пространства может служить множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с обычным расстоянием $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. Последовательность $x_n = (1 + 1/n)^n \in \mathbb{Q}$ является фундаментальной, однако $\lim x_n = e$ не является рациональным числом.

1.5. Компактность

В XIX веке чешский математик Б. Больцано заметил, что всякое ограниченное множество точек числовой прямой имеет хотя бы одну предельную точку. Идея выделения сходящейся последовательности из некоторых множеств привела к следующему понятию.

Определение 3. *Множество* K *метрического пространства* X *называется* компактным*, если из любой бесконечной последовательности* $\{x_n\} \subset K$ *можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу* $x \in K$.

Упражнение 1.8. *Доказать, что компактное множество замкнуто и ограничено.*

Упражнение 1.9. *Привести пример ограниченного и замкнутого множества в* $C[0, 1]$*, не являющегося компактным.*

Множество $M \subset$ X называется *относительно компактным*, если $\overline{M}$ – компактное множество. Множество A образует ε-сеть для множества M, если $\forall x \in M \; \exists \; y \in A$ такой, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Если $\forall \varepsilon > 0$ множество M имеет конечную ε-сеть, то M называется *вполне ограниченным*. Оказывается, что в полном метрическом пространстве компактность $\overline{M}$ равносильна вполне ограниченности M. Пусть $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ — замкнутое ограниченное множество; через $C(\overline{\Omega})$ обозначаем пространство непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций, $\rho(x, y) = \max\limits_{t \in \overline{\Omega}} |x(t) - y(t)|$. Множество $M \subset C(\overline{\Omega})$ называется *равномерно ограниченным*, если $\exists \alpha > 0 : \; |x(t)| \leq \alpha \; \forall x \in M$ при всех $t \in \overline{\Omega}$. При этом постоянная α не зависит от $x(t)$. *Равностепенная непрерывность* множества M означает, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, зависящая только от ε: $\; \forall t_{1,2} \in \overline{\Omega}$, $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon \; \forall x \in M$. Подчеркнем, что δ не зависит ни от выбора t_1, t_2, ни от функции $x = x(t) \in M$. Относительная компактность множества $K \subset C(\overline{\Omega})$ равносильна равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности K.

Упражнение 1.10. *Доказать, что множество*

$$K = \left\{ x = x(t) : x(t) = e^{-\alpha t}, \; t \in [0, 1], \; \alpha \in [1, 2] \right\}$$

вполне ограничено в $C[0, 1]$.

Типичным примером компактного множества в $C(\overline{\Omega})$ является следующее:

$$K = \left\{ x = x(t) \in C(\overline{\Omega}) : \; |x(t)| \leq \alpha \;\; \forall t \in \overline{\Omega}, \; |\nabla x(t)| \leq \beta \; \forall t \in \Omega \right\}.$$

1.6. Как линейное пространство сделать нормированным?

Рассмотрим линейное (векторное) пространство с умножением на вещественные числа. Понятие линейного пространства носит чисто алгебраический характер. Для того, чтобы изучать в этом пространстве задачи, связанные со сходимостью элементов, нужно определить расстояние между элементами, т. е. ввести метрику.

Определение 4. *Линейное пространство E над полем $\mathbb{R}$ называется* нормированным *пространством, если определено отображение:*

$$\forall x \in E \mapsto \|x\| \geq 0 \textit{ такое, что}$$

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(условие тривиальности);*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(условие однородности);*
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(неравенство треугольника).*

Число $\|x\|$ называется **нормой** *элемента (точки, вектора) $x \in E$.*

Любое нормированное пространство является метрическим, если определить метрику: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Поэтому все понятия, определенные в п. 1.1–1.5 для метрических пространств используются и в нормированных. Например, *сходимость по норме* (или *сильная сходимость*) последовательности $x_n \subset E$ к элементу $x \in E$ имеет место, если $\|x_n - x\| \to 0$, при $n \to \infty$.

Если нормированное пространство является полным в смысле сильной сходимости, то оно называется *банаховым пространством* (или пространством Банаха). Метрические пространства, приведенные в п. 1.2, являются банаховыми по соответствующим нормам:

1. $\mathbb{R}^n$. $\quad \|x\|_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{1/2}$;
2. l_p. $\quad \|x\|_{l_p} = (\sum_1^\infty |x_i|^p))^{1/p}, \ p \geq 1$;
3. $C[a, b]$. $\quad \|x\|_{C[a,b]} = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$;
4. $L^p(a, b)$. $\quad \|x\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, \ p \geq 1.$

Так как нормированное пространство E фактически является линейным пространством, то для E имеют смысл понятия, определённые для линейных пространств. Например:

1. Пусть $A \subset E, \ B \subset E$. $A + B = \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\} \subset E$
2. Множество $L \subset E$ называется **линейным многообразием**, если $\forall x, y \in L, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $x + y \in L, \ \lambda \cdot x \in L$.
3. Множество $x_0 + L$, где $x_0 \in E, \ L$ — линейное многообразие, называется **аффинным многообразием**.
4. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ линейного пространства E называются **линейно независимыми**, если $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0, \ c_i \in \mathbb{R} \Rightarrow c_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

В противном случае элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут линейно зависимыми.

5. **Базисом** линейного многообразия $L \subset E$ называется множество линейно независимых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \subset L$ таких, что $\forall x \in L\ \exists c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n:\ x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

   Числа c_i называются **координатами** элемента x в данном базисе; число n называется **размерностью** L, $n = \dim L$; L называется **n-мерным** многообразием. Если $\forall n \in \mathbb{N}$ в L можно найти n линейно независимых элементов, то L называется **бесконечномерным** линейным многообразием, $\dim L = \infty$.

6. **Отрезком**, соединяющим точки $x, y \in E$, называется множество
$$[x, y] = \{\alpha x + \beta y :\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1\}.$$

   Множество $A \subset E$ называется **выпуклым**, если $[x, y] \subset A\ \forall x, y \in A$.

   Соединение алгебраической структуры линейного пространства и метрических свойств элементов, определяемых нормой, приводит к понятию **подпространства**, которое есть просто **замкнутое линейное многообразие**. Заметим, что в случае если L — линейное многообразие, $n = \dim L < \infty$, то $\overline{L} = L$, то есть L — подпространство. Для бесконечномерных линейных многообразий равенство $\overline{L} = L$ может не иметь место, то есть не все линейные многообразия являются подпространствами. Если L — подпространство пространства E, $\dim L = \infty$, то последовательность линейно независимых элементов $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L$ называется счетным базисом L, если $\forall x \in L\ \exists \{c_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$:
$$x = \sum c_i x_i, \text{ т.е. } \|x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Упражнение 1.11. *Пусть L — множество всех многочленов степени не больше n, определенных на $[a, b]$. Показать, что L — подпространство в $C[a, b]$. Найти его базис.*

Упражнение 1.12. *Образует ли подпространство в $C[a, b]$ множество всех многочленов?*

Упражнение 1.13. *Доказать, что шар в нормированном пространстве не может содержать ненулевого линейного многообразия.*

В одном и том же линейном пространстве E можно по-разному определять норму элемента $x \in E$. Две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ называются **эквивалентными**, если: $\exists \alpha, \beta > 0, \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_2 \quad \forall x \in E$.

В этом случае из сходимости по одной норме следует сходимость по другой норме, а если по одной из этих норм E является полным (т.е. **банаховым**), то E является банаховым и по другой (из эквивалентных) норме. Отметим также, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Вложение нормированного пространства X в нормированное пространство $Y, \mathrm{X} \subset Y$ называется непрерывным, если $\|x\|_Y \leq \gamma \|x\|_X\ \forall x \in \mathrm{X}$, где γ не зависит от x. Если при этом ограниченное в X множество будет предкомпактным в Y, то вложение называется **компактным**.

В общем случае в нормированных пространствах неопределено понятие угла между элементами и, соответственно, ортогональности элементов. Тем не менее справедлив следующий результат о существовании «**почти перпендикуляра**» к подпространству $L \subset E,\ L \neq E$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in E,\ \|y\| = 1,$
$$\|x - y\| > 1 - \varepsilon\ \forall x \in L.$$
($y \in E$ — «почти перпендикуляр»).

1.7. Скалярные произведения и гильбертовы пространства

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$. **Скалярное произведение** на V есть симметрическая билинейная форма, являющаяся при этом положительно определенной. Каждой паре элементов $x, y \in V$ ставится в соответствие число (x, y), удовлетворяющее аксиомам: $\forall x, y, \lambda \in \mathbb{R}$

1. $(x, y) = (y, x)$ (симметрия);
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y);\ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (линейность);
3. $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$ (положительная определенность).

Пространство V со скалярным произведением называется **евклидовым**.

Замечание. Рассматривая линейное пространство V над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, следует заменить аксиому 1 в определении скалярного произведения условием $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Пространство V при этом называется **унитарным** пространством.

Фундаментальным свойством скалярного произведения является справедливость **неравенства Коши-Буняковского**

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y),$$

которое сразу следует из неотрицательности квадратичной функции

$$f(t) = (x + ty, x + ty) \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(достаточно положить $t = -(x, x)/(y, y)$, если $y \neq 0$). Неравенство переходит в равенство тогда и только тогда, когда x отличается от y скалярным множителем.

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что в евклидовом (и унитарном) пространстве можно определить норму

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

и, таким образом, евклидово пространство будет нормированным (и соответственно метрическим) пространством.

Наличие скалярного произведения позволяет определить *угол между ненулевыми элементами* евклидова пространства x, y; $\varphi = (\widehat{x, y})$, если $\varphi = \arccos\{(x, y)/(\|x\| \cdot \|y\|)\}$. В частности, элементы x и y из V называются **ортогональными** ($x \perp y$), если $(x, y) = 0$; множество $z \in V$ таких, что $(z, x) = 0\ \forall x \in M \subset V$, обозначается $M^{\perp}$ (*перпендикуляр* к M).

Определение 5. *Евклидово (унитарное) пространство V называется* гильбертовым*, если оно полное по норме, определяемой скалярным произведением.*

Таким образом гильбертово пространство является банаховым, т. е. полным нормированным пространством.

Замечание. Нормированное пространство можно сделать евклидовым в том и только в том случае, если в нем выполняется равенство «параллелограмма»

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\ \forall x, y \in V,$$

при этом скалярное произведение имеет вид:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Упражнение 1.14. *Доказать, что скалярное произведение есть непрерывная функция относительно сходимости по норме.*

Приведем примеры гильбертовых пространств.

1. $\mathbb{R}^n$. $\quad (x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k,$ где $x = \{x_k\}_1^n, y = \{y_k\}_1^n$.

2. l_2. $\quad (x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$ где $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots)$.

3. $L^2(\Omega),$ где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытая область. $(u,v) = \int_\Omega u \cdot v dx$ (интеграл Лебега).

Если M — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве V, то для любого элемента $x \in V$ существует единственный элемент $y \in M$ такой, что

$$\rho(x,M) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y, x-y)}.$$

Элемент y называется **проекцией** элемента x на множество $M, y = P_M(x)$. Очевидно, что условие $x = P_M(x)$ равносильно тому, что $x \in M$. Выбрав в качестве M подпространство $H \subset V$, заключаем, что любой элемент $x \in V$ допускает единственное представление в виде:

$$x = u + v,\ u \in H,\ v \in H^\perp,$$

при этом $u = P_H(x), v = P_{H^\perp}(x)$ и справедлива теорема Пифагора

$$\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Упражнение 1.15. *Доказать, что если H — подпространство гильбертова пространства Y, то $H^\perp$ также будет подпространством.*

Равенство $x = P_H(x) + P_{H^\perp}(x)\ \forall x \in V$ часто записывают в виде $V = H \oplus H^\perp$ и говорят, что V есть **ортогональная сумма** подпространств H и $H^\perp$. Напомним, что система элементов $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset V$ называется

1. **линейно независимой**, если $\forall n \in N$ система $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ линейно независима;

2. **ортогональной**, если $(x_k, x_j) = 0$ при $k \neq j, x_k \neq 0.$;

3. **ортонормированной**, если $(x_k, x_j) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$

Оказывается, эти понятия тесно связаны — ортогональная система всегда линейно независима и, обратно, любую линейно независимую систему можно ортонормировать с помощью процесса **ортогонализации** Шмидта. Полагаем $e_1 = x_1/\|x_1\|$. Далее, если

$$q_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} (x_k, e_j) e_j,\ k = 2, 3, \ldots,$$

то $e_k = q_k/\|q_k\|$.

Для конечной системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейная независимость равносильна условию $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det(x_k, x_j) \neq 0$. Данный определитель называется определителем Грама.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots\}$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве V. Числа $c_k = (x, e_k),\ k = 1, 2, \ldots$ называются коэффициентами Фурье элемента $x \in V$ относительно системы $\{e_k\}$. Для любого элемента $x \in V$ справедливо **неравенство Бесселя**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leq \|x\|^2.$$

Ортонормированная система $\{e_j\}$ называется **полной**, если из условия $c_k = (x, e_k) = 0\ \forall k$ следует, что $x = 0$. В. А. Стеклов, исследуя вопрос о разложимости функций по ортогональным системам, ввел понятие **замкнутости** системы $\{e_j\}$, означающее, что подпространство, порождаемое данной системой, совпадает со всем пространством V, и при этом любой элемент $x \in V$ можно представить в виде **ряда Фурье**

$$x = \sum_k c_k e_k,\ c_k = (x, e_k).$$

На основании ортогональности системы $\{e_k\}$ отсюда следует равенство Парсеваля–Стеклова

$$\|x\| = \sum_k |c_k|^2.$$

Оказывается, замкнутость и полнота в гильбертовом пространстве — равносильные понятия. Замкнутая (полная) ортонормированная система называется **ортобазисом** гильбертова пространства.

Упражнение 1.16. *Доказать, что система*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t, \ldots \right\}$$

является ортобазисом в пространстве $L^2(-\pi, \pi)$.

2. Линейные операторы

2.1. Пространство линейных непрерывных операторов

Пусть E, F-вещественные (комплексные) нормированные пространства. Отображение или оператор $A : D \to F$, $D \subset E$, называется **непрерывным** в точке $x_0 \in D$, если $Ax_n \xrightarrow{F} Ax_0$ при условии, что $x_n \in D$, $x_n \xrightarrow{E} x_0$; оператор называется **ограниченным**, если он отображает любое ограниченное множество из $D = D(A)$ на множество, ограниченное в F. Оказывается, имеется класс операторов, для которых из непрерывности в одной точке следует непрерывность на всей области определения D, и при этом непрерывность равносильна ограниченности.

Определение 6. *Оператор* $A : D \to F, D \subset E$ *называется линейным, если* D*-линейное многообразие в* E *и* $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\,(C)$, $\forall x, y \in D : A\,(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

Линейный оператор $A : E \to F$ ограничен тогда и только тогда, когда $\|Ax\|_F \le C\|x\|_E \, \forall x \in E$, где C не зависит от x. Для линейных операторов из непрерывности следует ограниченность и наоборот.

Упражнение 2.1. *Показать, что из непрерывности линейного оператора $A : D \to F$ в точке $x_0 \in D$ вытекает его непрерывность в каждой точке D, а значит, и ограниченность.*

Если множество $\mathcal{L}\,(E, F)$ линейных непрерывных операторов, ограниченных на E, со значениями в F наделить структурой линейного пространства, полагая $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ (или C) : $(A + B)x = Ax + Bx$, $\lambda A(x) = \lambda(Ax)$, а затем определить норму оператора: $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_F; x \in E, \|x\|_E = 1\}$, то получим нормированное пространство. Важной особенностью пространства $\mathcal{L}(E, F)$ является его **полнота** в случае, если пространство F является полным (банаховым). Пространство E при этом может и не являться полным. Сходимость по норме пространства $\mathcal{L}(E, F)$ называют **равномерной** сходимостью операторов.

Упражнение 2.2. *Доказать, что* $\|A\| = \sup\{\|Ax\|, \|x\|_E \le 1\} = \inf\{C : \|Ax\|_F \le C\|x\|_E \,\forall x \in E\}$.

Из определения нормы линейного оператора следует оценка $\|Ax\|_F \le \|A\| \cdot \|x\|_E$. Поэтому из равномерной сходимости последовательности операторов $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ к оператору A следует сходимость последовательности $\{A_n x\}$, при всех $x \in E$, к элементу $Ax \in F$ (иногда говорят, что $A_n \to A$ сильно при $n \to \infty$, если $A_n x \to Ax \,\forall\, x \in E$). Обратное, вообще говоря, неверно. Рассмотрим простой пример. Пусть $E = V$-гильбертово пространство с ортобазисом $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Определим последовательность операторов $A_n : V \to V, \forall x \in V,\ A_n x = \sum_1^n c_i e_i$, где $c_i = (x, e_i)$. Тогда

$$A_n x \to x \text{ при } n \to \infty \,\forall\, x \in V$$

и, следовательно, $A_n \to I$, (I-единичный оператор) в смысле поточечной (сильной) сходимости. Однако, равномерная сходимость последовательности $\{A_n\}$ не имеет места, т.к.

$$\|A_n - A_{n+p}\| = \sup\{\|A_n x - A_{n+p} x\|, \|x\| = 1\} \ge$$

$$\|A_n e_{n+1} - A_{n+p} e_{e+1}\| = \|e_{n+1}\| = 1 \,\forall\, n, p > 0.$$

Приведем две интересные теоремы, описывающие поведение последовательностей операторов из $\mathcal{L}(E, F)$.

Теорема (принцип равномерной ограниченности). *Пусть E-банахово пространство, F-нормированное пространство, $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ и последовательность $\{A_n x\}$ является ограниченной в $F \,\forall\, x \in E$. Тогда последовательность (числовая) $\{\|A_n\|\}$ ограничена.*
Данный принцип называют теоремой **Банаха-Штейнгауза**.

Теорема. *Пусть E, F-банаховы пространства, $A, A_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Последовательность A_n сильно сходится к A тогда и только тогда, когда последовательность норм операторов $\{\|A_n\|\}$ ограничена и $A_n x \to Ax$ $(n \to \infty)$ $\forall\, x \in L$, где L-линейное многообразие всюду плотное в E.*

Важное значение для приложений имеет следующий результат о продолжении линейного оператора, определенного на некотором линейном многообразии, на все пространство с сохранением нормы.

Теорема. *Пусть $A : D \to F, D \subset E, E$-нормированное пространство, F-банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(D, F), \overline{D} = E$. Тогда существует оператор $\tilde{A} \in \mathcal{L}(E, F)$ такой, что $\tilde{A}x = Ax \,\forall\, x \in D, \|\tilde{A}\| = \|A\|$.*

Оператор $\tilde{A}$ называется продолжением оператора A по непрерывности.

Множество нулей оператора $A : D \to F$ называется **ядром** оператора A, $\ker A = \{x \in D : Ax = 0\}$.

Множество $A(D) = \mathrm{Im}(A)$ значений оператора A может, вообще говоря, и не совпадать со всем пространством F.

Упражнение 2.3. *Пусть $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, $A \neq 0, B \neq 0$. $Im(A) \cap Im(B) = 0$. Доказать, что A и B линейно независимые элементы пространства $\mathcal{L}(E, F)$.*

В пространстве $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$ можно определить операцию умножения:

$$(A \cdot B)x = A(Bx) \; \forall \; x \in E.$$

Таким образом, в $\mathcal{L}(E)$ степени оператора находятся по формулам

$$A^0 x = Ix = x, A^n x = A(A^{n-1} x) \; \forall \; x \in E, n \in N.$$

Упражнение 2.4. *Доказать, что* $\forall A, B \in \mathcal{L}(E) \; \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \|A^n\| \leq \|A\|^n, n \in N.$

2.2. Обратный оператор

Пусть оператор $A : E \to F$ (необязательно линейный) обладает тем свойством, что каждому y из множества значений $\mathrm{Im}(A) \subset F$ соответствует только один элемент $x \in E$, для которого $y = Ax$, т.е. решение уравнения $Ax = y$ единственно.
Это соответствие рассматривается как оператор $B : \mathrm{Im}(A) \to E$, и, в силу определения, $B \cdot Ax = x \; \forall \; x \in E$ или $B \cdot A = I_E$, где I_E–единичный (тождественный) оператор в пространстве E. Оператор B называется **левым обратным** к A.

Упражнение 2.5. *Пусть $A : E \to F$ – линейный оператор,* $\ker A = \{0\}$. *Тогда существует линейный левый обратный оператор. Доказать.*

Если $\mathrm{Im}(A) = F$, т.е. оператор A устанавливает взаимно однозначное соответствие между E и F, то оператор B, определенный на всем F, называется **обратным оператором** к A и обозначается A^{-1}; $A^{-1}Ax = x \; \forall x \in E, AA^{-1}y = y \;\; \forall y \in F$.
Рассмотрим далее линейные операторы в случае, когда E, F нормированные пространства.
Линейный оператор $A : E \to F$ является **обратимым**, если $\mathrm{Im}(A) = F$, $\ker A = \{0\}$, **непрерывно обратимым**, если $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Критерием непрерывной обратимости является условие:

$$\|Ax\|_F \geq m\|x\|_E \;\; \forall x \in E, \tag{$*$}$$

где постоянная $m > 0$ не зависит от x.

Упражнение 2.6. *Пусть выполняется условие (*). Доказать, что* $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

Одним из "китов" теории банаховых пространств является следующий факт.

Принцип открытости отображения. Пусть E и F – банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathrm{Im}(A) = F$, $M \subset E$ – открытое множество. Тогда множество $A(M) \subset F$ также открытое.
Другими словами, при непрерывном линейном отображении банахова пространства E на банахово пространство F образ любого открытого множества есть снова открытое множество.
Из этого принципа вытекает важное следствие (теорема Банаха о гомеоморфизме).

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{L}(E, F)$, где E и F – банаховы пространства,* $\ker A = \{0\}$, *$Im(A) = F$. Тогда существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Таким образом, если линейный ограниченный оператор A, отображающий банахово пространство E **на все** банахово пространство F, имеет обратный A^{-1}, то оператор A^{-1} ограничен.
Последние два утверждения перестают быть верными, если отказаться от полноты одного из пространств E или F.

Упражнение 2.7. *В банаховых пространствах E, F рассмотрим операторное уравнение $Ax = y$, $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Доказать, что из однозначной разрешимости этого уравнения при любой правой части $y \in F$ следует непрерывная зависимость решения $x \in E$ от $y \in F$.*

Если ограниченный линейный оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ непрерывно обратим, то и близкие к нему линейные ограниченные операторы непрерывно обратимы:

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow \exists B^{-1} : F \to E. \qquad (**)$$

Упражнение 2.8. *Показать, что из (**) вытекает, что*

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B - A\| \cdot \|A^{-1}\|}.$$

В частном случае, когда $E = F, A = I, B = I - C,$ где $C \in \mathcal{L}(E), \|C\| < 1$, получаем оценку

$$\|(I - C)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|}.$$

2.3. Замкнутые операторы

Непрерывность (ограниченность) линейного оператора тесно связана с понятием замкнутости графика $G(A)$ оператора A.

Определение 7. Графиком *оператора $A : D \to F$ называется множество $G(A) = \{\{x, Ax\}, x \in D\} \subset E \times F$.*

Пусть E, F – нормированные пространства. Линейный оператор A называется **замкнутым**, если из условий $\forall x_n \in D$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ следует $x \in D$, $y = Ax$, то есть, $G(A)$ замкнутое множество в пространстве $Z = E + F$ пар $z = \{x, y\}$, где $x \in E, y \in F$, с метрикой $\rho(z_1, z_2) = \|x_1 - x_2\|_E + \|y_1 - y_2\|_F$.

Упражнение 2.9. *1) Если $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то A замкнут.*
2) Если A замкнут и $\exists A^{-1}$, то A^{-1} замкнут. Доказать.

Наряду с принципом открытости отображения и теоремой Банаха об обратном операторе третьим "китом" теории линейных операторов является следующая

Теорема (о замкнутом графике).*Пусть E, F – банаховы пространства, $A : E \to F$ – замкнутый линейный оператор. Тогда оператор A ограничен (непрерывен).*

3. Задачи и упражнения

3.1. Пространства

Вариант 1.

1. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой $\rho(x,y) =\mid arctg(x) - arctg(y) \mid$?
2. Сходится ли в $C[0,1]$ последовательность $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$?
3. Доказать, что гильбертово пространство **строго нормировано**, т.е. из условия $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ следует при $x \neq 0, y \neq 0$, что $y = \lambda x$, где $\lambda > 0$.

Вариант 2.

1. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой $\rho(x,y) =\mid e^x - e^y \mid$?
2. Сходится ли в $C[0,1]$ последовательность $x_n(t) = t^n - t^{2n}$?
3. Пусть в гильбертовом пространстве: $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$, $\|x_n + y_n\| \to\ 2$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Вариант 3.

1. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой $\rho(x,y) =\mid x^3 - y^3 \mid$?
2. Сходится ли в $C[0,1]$ последовательность $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$?
3. Доказать, что условие $\|x\| \leq \|x-y\|\ \forall y \in L$ эквивалентно ортогональности элемента x гильбертова пространства H подпространству $L \subset H$.

Вариант 4.

1. Доказать, что множество $\{\sin(nt)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(-\pi;\pi)$ замкнуто и ограничено.
2. Образует ли подпространство в $C[0,1]$ множество монотонных функций?
3. Вычислить углы треугольника, образованного точками в $L^2(-1,1) : f_1(t) = 0, f_2(t) = 1, f_3(t) = t$.

Вариант 5.

1. Будет ли компактным в $C[0,1]$ множество

$$M = \{y(t) = \int_0^1 e^{t+\tau} x(\tau)d\tau, x(t) \in C[0,1]\}?$$

2. Образует ли подпространство в $C[0,1]$ множество функций

$$L = \{x(t) : \int_0^1 x(t)dt = 0\}?$$

3. Доказать, что для ортогональной системы $\{x_k\}$ в гильбертовом пространстве следующие условия равносильны:
а) $\sum_k x_k$ сильно сходится;
б) $\sum_k \|x_k\|$ сходится.

Вариант 6.

1. Образует ли полное пространство множество непрерывных на $[0,1]$ функций таких, что $x(0) = x(1)$?
2. Доказать замкнутость конечномерного линейного многообразия нормированного пространства.
3. Доказать, что в $L^2(0,1)$ множество $L = \{x(t) \in L^2(0,1) : \int_0^1 x(t)dt = 0\}$ является подпространством и найти $L^{\perp}$.

Вариант 7.

1. Пусть $M \subset R$ – открытое множество. Будет ли множество

$$A_M = \{x(t) \in C[0,1], x(t) \in M \ \forall t \in [0,1]\}$$

открытым?
2. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x_0(t) = t$ до подпространства многочленов нулевой степени.
3. Доказать, что множество $L \subset L^2(0,1), L = \{x(t) \in L^2(0,1) : x(t) = 0$ п.в. на $[a,b] \subset [0,1]\}$ является подпространством и найти $L^{\perp}$.

Вариант 8.

1. Является ли множество функций $x_n(t) = \sin(t+n), t \in [0,1]$ вполне ограниченным в $C[0,1]$?
2. Найти расстояние в $C[0,1]$ от элемента $x_0(t) = t^2$ до подпространства многочленов степени не больше единицы.
3. Доказать, что множество многочленов $P(t)$ таких, что $P(1) = 0$ выпуклое и всюду плотное в $L^2(0,1)$.

Вариант 9.

1. Покажите, что множество последовательностей

$$x = (\xi_1, \xi_2, ...), \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 + ...} \le \xi_1$$

замкнуто в пространстве l_1.
2. Доказать, что параллелепипед $\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, ...) : |x_k| \le 1/k\}$ компактен в l_2.
3. В пространстве $L^2(0,1)$ найти расстояние от элемента $x(t) = t^2$ до подпространства $L = \{x \in L^2(0,1) : \int_0^1 x(t)dt = 0\}$.

Вариант 10.

1. Всегда ли диаметр шара в метрическом пространстве вдвое больше радиуса?
2. В пространстве l_2 найти расстояние $\rho(x, L_n)$ от элемента $x = (1,0,0,...)$ до подпространства $L_n = \{x \in l_2 : x = (x_1, x_2, ...), \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$.
3. В гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$ найти ортогональное дополнение к множеству многочленов с нулевым свободным членом.

3.2. Линейные операторы

Вариант 1.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$.
2. Найти ядро оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$.
3. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t)/t$ с областью определения $D = \{x \in C[0,1] : \exists \lim_{t\to+0} t^{-1}x(t)\}$. Доказать, что A – замкнутый оператор.

Вариант 2.

1. Найти норму линейного оператора $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$.
2. Доказать, что оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$ непрерывно обратим, и найти оператор A^{-1}.
3. Пусть A-замкнутый оператор. Доказать, что $\ker A$ – замкнутое множество.

Вариант 3.

1. Пусть $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$ – оператор Вольтерра в пространстве $C[0,1]$. Найти A^n и доказать, что $\|A^n\| \le K^n/n!$ для некоторой постоянной $K > 0$.
2. Доказать непрерывную обратимость оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t}x(s)ds$ и найти A^{-1}.
3. Пусть $A, B : E \to F$ – линейные операторы, причем A замкнут, B ограничен и $D(A) \subset D(B)$. Доказать, что $A + B$ – замкнутый оператор.

Вариант 4.

1. Найти норму линейного оператора $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, $Ax(t) = t\int_0^t x(\tau)d\tau$.
2. Пусть $A, B : E \to E$ – линейные операторы, $D(A) = D(B) = E, AB + A + I = 0, BA + A + I = 0$. Доказать, что существует обратный оператор A^{-1}.
3. Найти норму оператора ортогонального проектирования на подпространство H в гильбертовом пространстве V.

Вариант 5.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t^2)$.
2. Пусть $A \in \mathcal{L}(E), N_k = \ker(A^k), k = 0,1,2,....$ Доказать, что $N_0 \subset N_1 \subset ... \subset N_k \subset N_{k+1} \subset ...$, и если $N_k = N_{k+1}$ для некоторого натурального k, то $N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = ...$
3. Доказать, что последовательность операторов $A_n x(t) = x(t^{1+1/n}), n \in N$ в пространстве $C[0,1]$ такова, что $A_n \in \mathcal{L}(C[0,1])$ и при этом A_n сильно сходится к тождественному оператору при $n \to \infty$.

Вариант 6.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = t^2x(0)$.
2. Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x''(t) + x(t)$ с областью определения $D(A) = \{x \in C^2[0,1] : x(0) = x'(0) = 0\}$. Доказать непрерывную обратимость A и найти A^{-1}.
3. Пусть E – банахово пространство. Доказать, что в пространстве $\mathcal{L}(E)$ множество непрерывно обратимых операторов открыто.

Вариант 7.

1. Найти норму линейного оператора $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, 2x_2, 3x_3, ...)$.
2. Пусть $A, B : E \to E$ – линейные операторы, $D(A) = D(B) = E, AB = BA$. Доказать, что если B непрерывно обратим, $A, B \in \mathcal{L}(E)$, то $\|AB\| \le \frac{\|A\|}{\|B^{-1}\|}$.
3. Существует ли оператор A^{-1}, если $A : C[0,1] \to C^2[0,1], Ax(t) = \int_0^t e^{-|s-t|}x(t)ds$?

Вариант 8.

1. Найти норму линейного оператора $A : L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi)$, $Ax(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t + s)x(s)ds$
2. Найти решение операторного уравнения

$$x(t) + \lambda Ax(t) = y(t),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}, y \in C[0, 2\pi]$ заданы, оператор A определен в первом задании.
3. Пусть $A : E \to F$ – линейный оператор. Доказать, что его замкнутость равносильна условию, что $D(A)$ в норме $|||\ x\ ||| = \|x\|_E + \|Ax\|_F$ является банаховым пространством.

Вариант 9.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = t\int_0^t \frac{x(\tau)}{1-\tau} d\tau$.
2. Если $\ker A$ – подпространство в $E, A : E \to F$ – линейный оператор, вытекает ли отсюда, что A – ограниченный оператор?
3. Сходится ли последовательность операторов $A_n x : C[0,1] \to C[0,1], A_n x(t) = \int_0^t [\sum_0^n \frac{\tau^k}{k!}]x(\tau)d\tau, n \in N$ к оператору $Ax(t) = \int_0^t e^\tau x(\tau)d\tau$?

Вариант 10.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[-1,1] \to C[-1,1]$, $Ax(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$.
2. Пусть $A, A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ и $k = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ – число обусловленности оператора A. Получить оценку относительной погрешности решения уравнения
$Ax = y$:

$$\frac{1}{k}\frac{\|A\overline{x} - y\|}{\|y\|} \le \frac{\|\overline{x} - x\|}{\|x\|} \le k\frac{\|A\overline{x} - y\|}{\|y\|}.$$

3. Пусть $A : E \to E$ – линейный оператор и существует последовательность $\|x_n\| = 1, Ax_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что A не может быть непрерывно обратимым.

Список литературы

[1] Функциональный анализ *(под редакцией С.Г.Крейна)*. – М., Наука. 1972. 544с.

[2] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М., Наука. 1965.

[3] *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М., Наука. 1980.

[4] *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М., Наука. 1979.

[5] *Треногин В.А., Писаревский В.М., Соболева Г.С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М., Наука. 1984.