Глава 1. Целые числа

§1.1 Теория делимости

Целыми называются числа ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,..., т.е. натуральные числа 1, 2, 3, 4,..., а также нуль и отрицательные числа -1, -2, -3, -4,... . Множество всех целых чисел обозначается через Z (от немецкого слова Zahl - число).

Сумма, разность и произведение двух целых чисел - также целые числа. Если для трех целых чисел a, b и c выполнено равенство $a = bc$, то говорят: *a делится на b* или *b делит a* и применяют соответственно обозначения $a \vdots b$, b / a. При этом a называют *кратным числа b*, а *b - делителем числа a*.

Свойства делимости целых чисел:

1). a делится на a (рефлексивность);

2). если a делится на b, b делится на a, то $a = +b$ или -b;

3). если a делится на b, b делится на c, то a делится на c (транзитивность);

4). если $a + b + c = 0$, a делится на d, b делится на d, то и c делится на d;

5). если ad делится на bd, $d \neq 0$, то a делится на b.

Доказательство свойства 1: $a = a \cdot 1$.

Доказательство свойства 2: $a = bq_1$, $b = aq_2$. Отсюда $a = aq_1q_2$, т.е. $q_1q_2 = 1$; $q_1 = +1$ или -1.

Доказательство свойства 3: $a = bq_1$, $b = cq_2$. Отсюда $a = cq_1q_2$.

Доказательство свойства 4: $a + b + c = 0$, $a = dk$, $b = dl$. Отсюда $c = d(-k - l)$.

Доказательство свойства 5: $ad = bd \cdot q$, $d \neq 0$. Отсюда $a = bq$.

Теорема (о делении с остатком): Для любых двух целых чисел a и b существует и притом единственная пара чисел q и r, для которых

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < |b|.$$

Доказательство теоремы существования. Расположим на числовой оси числа ..., -2b,
-b, 0, b, 2b,...

Они разбивают ось на интервалы длины $|b|$, в один из которых попадает число a, т.е. существует целое число q, для которого

$$bq \le a < b(q + 1).$$

Введем обозначение $a - bq = r$. Тогда

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < |b|.$$

Доказательство теоремы единственности проведем методом от противного. Пусть существуют два представления

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \le r_1 < |b|, \qquad (1)$$

$$a = bq_2 + r_2, \quad 0 \le r_2 < |b|. \qquad (2)$$

Предположим, что $r_1 < r_2$. Тогда $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$; $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Здесь $0 < r_2 - r_1 < |b|$, в то же время $|b(q_1 - q_2)| \ge |b|$. Получили противоречие, а это значит , что предположение $r_1 < r_2$ неверно. Аналогично приводит к противоречию предположение $r_2 < r_1$. Остается лишь одна возможность $r_1 = r_2$, но тогда и $q_1 = q_2$, т.е. оба представления совпадают.

Доказательство закончено.

Число q в равенстве $a = bq + r$ называется *неполным частным*, а *r остатком от деления a* на b. Если $r = 0$, то q называется *частным* от деления a на b.

<u>Пример.</u> Если $a = 198$, $b = 15$, то $198 = 15 \cdot 13 + 3$, $0 < 3 < 15$.

Если $a = 198$, $b = -15$, то $198 = (-15) \cdot (-13) + 3$, $0 < 3 < |-15|$.

Если $a=-198,\quad b=15,$ то $-198=15\cdot(-14)+12,\quad 0<12<15.$

Если $a=-198,\quad b=-15,$ то $-198=(-15)\cdot 14+12,\quad 0<12<|-15|.$

Если $a=13,\quad b=15,$ то $13=15\cdot 0+13,\quad 0<13<15.$

Упражнения и задачи

1. Если каждое из чисел a и b делится на c, то их сумма и разность также делится на c. Доказать.
2. Для любого целого числа b если a делится на c, то и ab делится на c. Доказать.
3. Если $ak=bk,\ k\neq 0,$ то $a=b.$ Доказать это.
4. Если a делится на b, то при любом целом $k\neq 0$ и ak делится на bk и ak делится на b. Доказать.
5. Если a делится на b, то при любом целом $n\neq 0$ a^n делится на b^n. Доказать.
6. Для любых целых чисел $a\geq 1$ и $m>1$ существует и притом единственное представление числа a в виде $a=c_0m^n+c_1m^{n-1}+\ldots+c_{n-1}m+c_n$, где $c_0\neq 0,\ 0\leq c_i<m$ при всех $i=0,1,\ldots,n$ (представление числа a в системе счисления с основанием m). Доказать.
7. Произведение трех последовательных целых чисел делится на 6. Доказать.
8. Произведение четырех последовательных целых чисел делится на 24. Доказать.
9. Доказать, что m^5-m делится на 30 для любого целого числа m.
10. Доказать, что

а) если a^2+b^2 делится на 3, то a делится на 3 и b делится на 3;

б) если a^2+b^2 делится на 7, то a и b тоже делятся на 7;

в) если $a^2+b^2=c^2$, то abc делится на 60.

11. Найти шестизначное число, которое оканчивается на 5 и увеличивается в 4 раза после перестановки этой цифры на первое место.
12. Если пятизначное число делится на 41, то и все числа, полученные путем круговой перестановки цифр этого числа, делятся на 41. Доказать это.
13. Если трехзначное число abc делится на 37, то и числа bca, cab тоже делятся на 37. Доказать.
14. Если $mn+pq$ делится на $m-p$, то и $mq+np$ делится на $m-p$. Доказать.
15. Найти четырехзначное число, которое при делении на 251 и 252 дает в остатке 209 и 202.
16. Вывести признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 14, 15, 25, 125.

§1.2 Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида

Если d делит a и d делит b, то d - *общий делитель* чисел a и b. Так как делителей чисел a и b конечное число, то и общих делителей чисел a и b конечное число. Среди любого конечного числа целых чисел существует наибольшее. Наибольший из общих делителей называется *наибольшим общим делителем* чисел a и b и обозначается НОД(a,b) или просто (a,b). Аналогично вводится наибольший делитель нескольких целых чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Если наибольший общий делитель чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ равен 1, то эти числа называются *взаимно простыми*. Числа попарно взаимно простые являются и взаимно простыми, но числа взаимно простые не обязательно попарно взаимно простые. Например, числа 10, 12, 27 взаимно простые, но пары 10 и 12, 12 и 27 имеют общие множители.

Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. Пусть a и b - положительные целые числа и $a>b$. Применим теорему о делении с остатком несколько раз:

$$a=bq_1+r_1,\quad 0<r_1<b;$$

$$b = r_1 q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1;$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1};$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}.$$

Процесс деления предыдущего остатка на следующий конечен, так как в последовательности

$$0 < \ldots < r_3 < r_2 < r_1 < b$$

может быть только конечное число чисел $r_1, r_2, r_3, \ldots$ (не более, чем b чисел).

Пусть x - общий делитель чисел a и b. Тогда двигаясь от равенства к следующему, начиная с первого, получим r_1 делится на x, r_2 делится на x и т.д., r_n делится на x. Двигаясь же от последнего равенства к первому, заметим, что r_{n-1} делится на r_n, r_{n-2} делится на r_n и т.д., b делится на r_n, a делится на r_n. Таким образом, r_n - общий делитель чисел a и b, делящийся на любой другой общий делитель этих чисел, т.е. $r_n = (a,b)$. Таким образом, последний ненулевой остаток в алгоритме Евклида - наибольший общий делитель.

<u>Пример.</u> Найти НОД(1173, 323).

Решение:

$$1173 = 323 \cdot 3 + 204,$$
$$323 = 204 \cdot 1 + 119,$$
$$204 = 119 \cdot 1 + 85,$$
$$119 = 85 \cdot 1 + 34,$$
$$85 = 34 \cdot 2 + 17,$$
$$34 = 17 \cdot 2.$$

Ответ: 17.

Упражнения и задачи

1. Найти наибольший общий делитель систем чисел:
а) 546 и 231; б) 1001 и 6253; в) 1517 и 2257;
г) 2737, 9163 и 9639; д) 1411, 4641 и 5253.
2. Доказать, что если $a = bq + r$, то $(a,b) = (b,r)$.
3. Доказать, что если a делится на b, то $(a,b) = b$.
4. Для любого целого положительного числа m доказать равенство
$$(am, bm) = (a,b)m.$$
5. Если $(a,b) = 1$, то $(ac,b) = (c,b)$. Доказать.
6. Доказать, что $(a,b,c) = \big((a,b),c\big)$.
7. Доказать, что для любых натуральных a и b имеет место равенство
$$(a,b) = (5a + 3b, 13a + 8b).$$
8. Если $(a,m) = 1$, $(b,m) = 1$, то $(ab,m) = 1$. Доказать.

§1.3 Теорема о линейном представлении наибольшего общего делителя

Теорема. Если $d = (a,b)$, то существуют целые числа u и v, для которых $d = au + bv$.

Доказательство: Рассмотрим множество всех целых чисел вида $ax + by$, где x и y - любые целые числа

$$M = \{ax + by, \quad x, y \in Z\}.$$

Это множество непусто, в частности, ему принадлежат числа a и b. Ведь a можно представить в виде $a = 1 \cdot a + 0 \cdot b$, а b - в виде $b = 0 \cdot a + 1 \cdot b$. Для любых двух целых чисел из этого множества частное от деления одного на другое также принадлежит множеству M. Действительно, если $k = a\alpha_1 + b\beta_1$, $l = a\alpha_2 + b\beta_2$, $k = lq + r$, то $r = a(\alpha_1 - \alpha_2 q) + b(\beta_1 - \beta_2 q) \in M$.

Пусть $d_0 = a\alpha_0 + b\beta_0$ - наименьшее положительное число в множестве M. Тогда любое число из M делится на число d_0 без остатка. Действительно, остаток должен принадлежать множеству M и должен быть меньше d_0, а этому условию удовлетворяют лишь остатки, равные нулю.

Таким образом, и a, и b делятся на d_0 без остатка, т.е. d_0 - их общий делитель. Очевидно, что d_0 делится на любой другой их общий делитель, а это означает, что $d_0 = d$. Теорема доказана.

Пример. Найти линейное представление наибольшего общего делителя чисел 1173 и 323.

Решение: Из примера, приведенного в предыдущем параграфе, известно, что НОД(1173, 323) = 17. Будем подниматься по равенствам алгоритма Евклида вверх:

$$17 = 85 - 34\cdot 2 = 85 - (119 - 85)\cdot 2 = -119\cdot 2 + 85\cdot 3 =$$

$$= -119\cdot 2 + (204 - 119)\cdot 3 =$$

$$= 204\cdot 3 - 119\cdot 5 = 204\cdot 3 - (323 - 204)\cdot 5 = -323\cdot 5 + 204\cdot 8 =$$

$$= -323\cdot 5 + (1173 - 323\cdot 3)\cdot 8 =$$

$$= -323\cdot 29 + 1173\cdot 8.$$

Ответ: $\text{НОД}(1173{,}323) = 1173\cdot 8 + 323\cdot(-29)$.

Теорема Евклида. Если ac делится на b, c и b взаимно просты, то a делится на b.

Доказательство: Так как $(c,b) = 1$, то по теореме о линейном представлении НОД существуют числа u и v, для которых

$$cu + bv = 1.$$

Тогда

$$acu + abv = a.$$

Из условия следует, что слагаемое acu делится на b, слагаемое abu также делится на b. Отсюда, a делится на b. Что и требовалось доказать.

Упражнения и задачи

1. Если b и c взаимно просты, a делится на b и a делится на c, то a делится на bc. Доказать.
2. Доказать, что a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют целые числа u и v, для которых $au + bv = 1$.
3. Доказать, что множество всех общих делителей чисел a и b совпадает с множеством всех делителей их НОД.
4. Для пар чисел a и b найти числа u и v, для которых $d = au + bv$:
а) $a = 23,\ b = 30$; б) $a = 63,\ b = 42$; в) $a = 35,\ b = 25$;
г) $a = 80,\ b = 50$; д) $a = 105,\ b = 182$.

§1.4 Наименьшее общее кратное

Если число a делится на несколько чисел, то оно называется их *общим кратным.* Наименьшее положительное общее кратное называется *наименьшим общим кратным*. Для него применяют обозначения $\text{НОК}(a_1,\ldots,a_n) = [a_1,\ldots,a_n]$.

Теорема. Наименьшее общее кратное двух целых чисел a и b равно произведению этих чисел, деленному на их наибольший общий делитель, т.е.

$$\text{НОК}(a,b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a,b)}.$$

Доказательство: Пусть $N \vdots a$, $N \vdots b$, т.е. $N = aN_1$. Пусть также $d = (a,b)$, $a = da_1$, $b = db_1$. Тогда $(a_1,b_1) = 1$. По условию a_1dN_1 делится на db_1. Отсюда a_1N_1 делится на b_1. По теореме Евклида N_1 делится на b_1, т.е. $N_1 = b_1t$. Мы получили, что произвольное общее кратное можно записать в виде

$$N = ab_1t = \frac{ab}{d}t, \quad t \in Z.$$

Наименьшее положительное целое число такого вида при $t = 1$ имеет вид $\frac{ab}{d}$. А это и требовалось доказать.

Следствие. Произвольное общее кратное чисел a и b есть кратное их наименьшего общего кратного.

Упражнения и задачи

1. Найти наименьшее общее кратное следующих систем чисел:

а) 544 и 128; б) 360 и 504; в) 24, 20 и 72; г) 28, 24 и 63.

2. Дано: $\text{НОД}(a,b)=8$, $\text{НОК}(a,b)=96$. Найти a и b.
3. Сумма двух чисел 667, а отношение их НОК к НОД равно 120. Найти эти числа.
4. Доказать, что $\text{НОК}(a,b)=\dfrac{abc\cdot\text{НОД}(a,b,c)}{\text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОД}(a,c)\cdot\text{НОД}(b,c)}$.

§1.5 Простые числа

Число называется *простым*, если оно делится только на себя и 1. Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... простые. Числа, которые имеют кроме себя и 1 другие положительные делители называются *составными*. Число 1 считается ни простым, ни составным. Оно действительно занимает в ряде натуральных чисел особое положение. Ведь оно имеет только 1 делитель, а все другие натуральные числа имеют два или более двух делителей.

Теорема. Наименьший, отличный от 1, делитель целого числа, большего единицы, есть число простое.

Доказательство: Пусть q - наименьший, отличный от 1, делитель натурального числа $n\neq 1$. Предположим, что число q составное, тогда оно имеет делитель $q_1<q$. По свойству транзитивности q_1 - делитель числа n, причем $q_1<q$, что противоречит выбору числа q. Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение неверно и число q простое.

Теорема. Простых чисел бесконечно много.

Доказательство: Предположим, что их конечное число и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - все простые числа. Тогда число $N=p_1p_2\ldots p_k+1$ отлично от 1 и от $p_1, p_2, \ldots, p_k$, т.е. составное, а значит оно делится хотя бы на одно простое число. Пусть $N=p_1t$. Тогда $p_1p_2\ldots p_k+1=p_1t;\quad 1=p_1\left(t-p_2\ldots p_k\right)$, т.е. p_1 делит 1, а это неверно. Аналогично получим, что N не может делиться ни на одно другое простое число. Противоречие.

Упражнения и задачи

1. Доказать бесконечность числа простых чисел вида $4m+3$.
2. Доказать бесконечность числа простых чисел вида $6m+5$.
3. Если простое число $p\geq 3$, то его можно представить в виде $6k+1$ или $6k-1$. Доказать.
4. Если $p\geq 3$, p - простое число, то p^2-1 делится на 24. Доказать.
5. Доказать, что при натуральном $n>1$ число составное
6. а) n^4+4 (теорема Софи Жермен); б) n^4+n^2+1.
7. Найти все простые числа p, для которых

а) $p+10$ и $p+14$ тоже простые;

б) $2p^2+1$ тоже простое.

8. Решить в простых числах $x^y+1=z$.
9. Если 2^n-1 - простое число, то и n - простое число. Доказать.
10. Если 2^n+1 - простое число, то число n является степенью числа 2. Доказать.
11. С помощью решета Эратосфена составить таблицу простых чисел, не превосходящих 500.
12. Доказать, что квадрат простого числа $p\geq 5$, при делении на 30 дает в остатке 1 или 19.
13. Проверить, что значение многочлена $f(x)=x^2+3x+19$ при $x=0,1,2,\ldots,14$ - простые числа.
14. Проверить, что значение многочлена $f(x)=x^2+x+41$ простые при $x=0,1,\ldots,39$.
15. Доказать, что n^2+3n+5 не делится на 121 ни при каком n.
16. Наименьший простой делитель составного числа N не превосходит $\sqrt{N}$. Доказать.

§1.6 Основная теорема арифметики кольца целых чисел

Теорема. Любое натуральное число, отличное от 1, можно представить в виде произведения простых чисел и притом единственным образом с точностью до порядка следования сомножителей.

Доказательство теоремы существования проведем методом полной математической индукции по числу n.

База индукции. Простое число мы рассматриваем как произведение простых чисел, состоящее из одного множителя. Поэтому для простых чисел утверждение теоремы существования верно и, в частности, для числа 2.

Гипотеза индукции. Предположим, что утверждение теоремы верно при всех k, для которых $2 \le k < n$.

Право перехода. Обозначим через p наименьший целый положительный отличный от 1 делитель числа n. Ясно, что p - простое число и $n = pn_1$. Если $n = p$, то утверждение теоремы верно. Если $n_1 > 1$, то к n_1 можно применить предположение индукции, так как $n_1 < n$. Тогда n_1, а следовательно и n можно представить в виде произведения простых чисел. Теорема существования доказана.

Доказательство теоремы единственности проведем методом от противного. Пусть для некоторого натурального числа n имеется два представления в виде произведения простых чисел $n = p_1 \ldots p_k = q_1 \ldots q_l$, и пусть $k \le l$. Предположим, что $p_1 \ne q_1$. Тогда $(p_1, q_1) = 1$ и произведение

$q_1 q_2 \ldots q_l$ делится на p_1. По теореме Евклида отсюда следует, что $q_2 \ldots q_l$ делится на p_1. Повторяя рассуждения при предположении $p_1 \ne q_2, \ldots,$ получим, что p_1 должно равняться одному из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_l$. Изменив нумерацию, можно добиться того, что $p_1 = q_1$. Итак, мы имеем равенство

$$p_1 p_2 \ldots p_k = p_1 q_2 \ldots q_l, \text{ где } k \le l.$$

Отсюда

$$p_2 \ldots p_k = q_2 \ldots q_l.$$

Вновь повторяя рассуждения, получим $p_2 = q_2, \ldots, p_k = q_k$. Равенство $1 = q_{k+1} \ldots q_l$ невозможно, т.е. $k \ge l$. Предположение $l < k$ приводит к такому же противоречию. Остается лишь одна возможность $k = l$. Итак, представления оказались тождественны. Теорема доказана.

В разложении числа n на простые сомножители некоторые простые числа могут повторяться. Собирая одинаковые сомножители в степени, получим *каноническое представление* числа n:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Из основной теоремы арифметики следует, что все делители числа n можно записать в виде

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k},$$

где $0 \le \beta_1 \le \alpha_1,\ 0 \le \beta_2 \le \alpha_2, \ldots,\ \ 0 \le \beta_k \le \alpha_k$.

Из этой теоремы также вытекает и второй способ нахождения НОД и НОК. Предположим, что числа a и b представлены в виде:

$$a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}, \quad b = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}.$$

Здесь к каноническому представлению числа a приписаны в нулевой степени те простые числа, которые входят в каноническое представление числа b, но не входят в представление числа a. Соответственно то же проделано с каноническим представлением числа b. Тогда

$$\text{НОД}(a,b) = p_1^{\gamma_1} \ldots p_k^{\gamma_k}, \qquad \gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i),\ 1 \le i \le k;$$

$$\text{НОК}(a,b) = p_1^{\delta_1} \ldots p_k^{\delta_k}, \qquad \delta_j = \max(\alpha_j, \beta_j),\ 1 \le j \le k.$$

Упражнения и задачи

1. Найти каноническое представление чисел 100, 128, 2000.
2. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 2000 и 128.
3. Пусть p - простое число. Доказать, что если a не делится на p, b не делится на p, то и ab не делится на p.
4. Разложить на множители число $3^{10} + 3^5 + 1$.
5. Найти все числа вида $135xy$, делящиеся на 45.

§1.7 Целая часть числа

Функция $f(x)=[x]$ определена для всех вещественных значений x и представляет собой наибольшее целое, не превосходящее x. Эта функция называется *целой частью x, антье от x.* Разность $x-[x]$ называется *дробной частью* x и обозначается $\{x\}$.

<u>*Пример.*</u>
$[\pi]=3,\ [-\pi]=-4,\ \left[\sqrt{13}\right]=3,\ [7]=7,\ \{7\}=0,\ [2{,}3]=2,\ \{-4{,}75\}=0{,}25.$

Теорема. Показатель, с которым простое число p входит в $n!$ равен

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

Доказательство: Сомножителей, кратных p, в произведении $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p\cdot\ldots\cdot 2p\cdot\ldots\cdot n$ равно $\left[\frac{n}{p}\right]$. Среди них, кратных p^2, равно $\left[\frac{n}{p^2}\right]$,...

<u>*Задача.*</u> Найти количество чисел, взаимно простых с 3, 5 и 7, среди первой тысячи чисел натурального ряда.

Решение: Вычтем из 1000 количество чисел, делящихся на 3, т.е. $\left[\frac{1000}{3}\right]$, затем вычтем количество чисел, делящихся на 5 и на 7, получим

$$1000-\left[\frac{1000}{3}\right]-\left[\frac{1000}{5}\right]-\left[\frac{1000}{7}\right].$$

Это не ответ, так как допущен двойной счет, а именно, числа делящиеся одновременно на 3 и 5 или 3 и 7 или 5 и 7 здесь учтены дважды. Для исправления полученной ошибки прибавим $\left[\frac{1000}{15}\right]+\left[\frac{1000}{21}\right]+\left[\frac{1000}{35}\right]$. Полученная сумма вновь не может быть ответом, так как числа, которые делятся на все три числа 3, 5 и 7, мы три раза вычитали, а затем три раза прибавили. Исправив эту ошибку, мы получим ответ:

$$1000-\left[\frac{1000}{3}\right]-\left[\frac{1000}{5}\right]-\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{15}\right]+\left[\frac{1000}{21}\right]+\left[\frac{1000}{35}\right]-\left[\frac{1000}{105}\right].$$

Замечание: При решении задачи применен метод включения и исключения.

Упражнения и задачи

1. Доказать, что $[x+y]\geq[x]+[y]$ для любых вещественных x и y.
2. При каком положительном целом m $[12{,}4m]=86$?
3. Найти показатель степени числа 3 в каноническом представлении числа 100!.
4. Сколькими нулями оканчивается число 100!?
5. Разложить на простые множители 15!.
6. Найти количество целых положительных чисел, не превосходящих 2311 и взаимно простых с числами 5, 7, 12.

§1.8 Функция Эйлера

Функция Эйлера $y=\varphi(a)$ определена для всех натуральных a и представляет собой количество натуральных чисел, взаимно простых с a и не превосходящих a, Считаем, что $\varphi(1)=1$.

<u>*Примеры.*</u> $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2$, $\varphi(6)=2$, $\varphi(8)=4$,
$\varphi(p)=p \quad \varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$

Теорема. Если каноническое представление натурального числа $n\neq 1$ имеет вид

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k},$$

то

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Доказательство: Применим метод включения и исключения:

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \dots - \frac{n}{p_k} + \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} - \frac{n}{p_1 p_2 p_3} - \frac{n}{p_1 p_2 p_4} - \dots + (1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

Раскрыв скобки в произведении, мы получим эту же сумму. Отсюда следует утверждение теоремы.

Упражнения и задачи

1. Найти значение функции Эйлера для чисел:
а) 375; б) 990; в) 1400; г) 1890.
2. Дано: $\varphi(a) = 3600, a = 3^\alpha 5^\beta 7^\gamma$ Найти a.
3. Дано: $\varphi(a) = 11424, a = p^2 q^2$ где p и q - различные простые числа. Найти a.
4. Решить уравнение $\varphi(7^x) = 705894$.
5. Доказать, что $\varphi(4n) = 2\varphi(2n), \varphi(4n+2) = \varphi(2n+1)$
6. Найти x, если а) $\varphi(x) = 12$; б) $\varphi(x) = \frac{1}{2}x$; в) $\varphi(x) = \frac{1}{3}x$;
г) $\varphi(x) = \frac{1}{4}x$.

Варианты контрольной работы

I вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
а) 92772757 ; б) 40! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
а) 105369 и 4991 (по алгоритму Евклида);
б) 216270, 192329 и 178178 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
а) 720 и 1512 (по формуле);
б) 96, 64 и 20 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа n = 343343.
5. Дано: φ(n) = 3600, $n = 3^{б} \cdot 5^{в} \cdot 11^{г}$. Найдите n.
6. Найдите две последние цифры числа 17^{61}.
7. Решите сравнение:
а) $12x \equiv 4 \pmod 5$, б) $49x \equiv 14 \pmod{77}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{17}; \\ x \equiv 3 \pmod{14}. \end{cases}$
9. Доказать, что если $(a,b) = 1$, то наибольший общий делитель чисел $a+b$ и $a^2 + b^2$ равен либо 1, либо 2.
10. Докажите, что $53^{53} - 33^{33}$ делится на 10.

II вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
а) 97363981 ; б) 19! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
а) 62510 и 23731 (по алгоритму Евклида);
б) 454532, 174820 и 82287 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
а) 180 и 504 (по формуле);
б) 28, 22 и 44 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа n = 225225.

5. Решите уравнение: $\varphi(5^x) = 2500$.
6. Найдите две последние цифры числа 7^{114}.
7. Решите сравнение:
   а) $13x \equiv 5 \pmod{21}$, б) $88x \equiv 14 \pmod{26}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{15}; \\ x \equiv 13 \pmod{21}. \end{cases}$
9. Доказать, что если $(a,b)=1$, то наибольший общий делитель чисел $11a+2b$ и $18a+5b$ равен либо 1, либо 19.
10. Найдите наибольшее трехзначное число, при делении которого на 4 получается в остатке 3, при делении на $5-b$ в остатке 4, при делении на $6-b$ в остатке 5.

3 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 29520491; б) 25! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 72181 и 7279 (по алгоритму Евклида);
   б) 46330, 197750 и 95372 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 270 и 405 (по формуле);
   б) 16, 40, 24 и 8 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n = 129600$.
5. Дано: $\varphi(n) = 360$, $n = 3^б \cdot 5^в$. Найдите n.
6. Найдите две последние цифры числа 11^{203}.
7. Решите сравнение:
   а) $24x \equiv 6 \pmod{25}$, б) $45x \equiv 105 \pmod{115}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{15}; \\ x \equiv 11 \pmod{25}. \end{cases}$
9. Доказать, что если $f(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами, a и b - натуральные числа, причем $(a,b)=1$, $f(a)$ делится на произведение ab, $f(b)$ делится на произведение ab, то $f(a+b)$ также делится на произведение ab.
10. Докажите, что если при $n>2$ одно из чисел 2^n+1 и 2^n-1 - простое, то второе будет составным (при $n=2$ оба числа простые).

4 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 71899443; б) 31! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 32219 и 19285 (по алгоритму Евклида);
   б) 365010, 26220 и 230230 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 666 и 555 (по формуле);
   б) 15, 35 и 25 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n = 96096$.
5. Составить таблицы сложения и умножения по модулю 14.
6. Найдите две последние цифры числа 7^{302}.
7. Решите сравнение:
   а) $53x \equiv 29 \pmod{105}$, б) $56x \equiv 16 \pmod{116}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{35}; \\ x \equiv 18 \pmod{55}; \\ x \equiv 24 \pmod{91}. \end{cases}$
9. Найдите 10 последовательных составных чисел.
10. Цифры трехзначного числа - последовательные натуральные числа. Найти разность между данным

числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

5 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 36279061; б) 26! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 70357 и 7751 (по алгоритму Евклида);
   б) 353899, 494130 и 47320 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 115 и 690 (по формуле);
   б) 63, 21 и 45 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа n = 121121.
5. Решите уравнение: $\overline{8}\cdot\overline{x}=\overline{3}$ по модулю 12.
6. Найдите три последние цифры числа 3^{798}.
7. Решите сравнение:
   а) $95x \equiv 31 \pmod{205}$, б) $48x \equiv 36 \pmod{102}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{15}; \\ x \equiv 4 \pmod{21}; \\ x \equiv 5 \pmod{33}. \end{cases}$
9. При каких простых p число $14p^2+1$ простое ?
10. Докажите, что число $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.

6 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 64984829; б) 38! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 64255 и 12070 (по алгоритму Евклида);
   б) 736310, 21547 и 580580 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 272 и 256 (по формуле);
   б) 56, 64 и 78 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа n =189189.
5. Составить таблицы сложения и умножения по модулю 13.
6. Найдите три последние цифры числа 3^{301}.
7. Решите сравнение:
   а) $47x \equiv 19 \pmod{77}$, б) $105x \equiv 42 \pmod{213}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{42}; \\ x \equiv 12 \pmod{51}; \\ x \equiv 17 \pmod{70}. \end{cases}$
9. Найдите 13 последовательных составных чисел.
10. Докажите, что $2^{60}+7^{30}$ делится на 13.

7 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 87501271; б) 39! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 167551 и 24249 (по алгоритму Евклида);
   б) 993700, 49362 и 380380 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 206 и 127 (по формуле);
   б) 27, 24 и 51 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа n =705894.
5. Решите уравнение $\overline{7}\cdot\overline{x}=\overline{2}$ по модулю 8.
6. Найдите две последние цифры числа 3^{157}.
7. Решите сравнение:
   а) $17x \equiv 13 \pmod{165}$, б) $34x \equiv 20 \pmod{70}$.

8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{103}; \\ x \equiv 3 \pmod{107}. \end{cases}$
9. Найдите все простые трехзначные числа, остающиеся простыми при любых перестановках их цифр.
10. Докажите, что при любом натуральном n число $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ делится на 25.

8 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 36369333; б) 20! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 48691 и 15403 (по алгоритму Евклида);
   б) 643960, 58990 и 340340 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 366 и 549 (по формуле);
   б) 54, 56 и 12 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа n =114114.
5. Составьте таблицы сложения и умножения по модулю 12 .
6. Найдите три последние цифры числа 7^{1199}.
7. Решите сравнение:
   а) $157x \equiv 109 \pmod{35}$, б) $161x \equiv 91 \pmod{231}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{403}; \\ x \equiv 3 \pmod{199}. \end{cases}$
9. Докажите, что если $(a,b)=1$, то дробь $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ несократима.
10. Докажите, что при любых целых a и b и целом неотрицательном n число $(7a+3)^{2n+1} + (7b+25)^{2n+1}$ делится на 7.

9 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 54960983; б) 24! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 82130 и 64887 (по алгоритму Евклида);
   б) 834373, 75492 и 233233 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 740 и 560 (по формуле);
   б) 49, 28 и 35 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа n =270270.
5. Решите уравнение $\overline{5} \cdot \overline{x} = \overline{3}$ по модулю 9.
6. Найдите три последние цифры числа 11^{1201}.
7. Решите сравнение:
   а) $21x \equiv 13 \pmod{35}$, б) $30x \equiv 18 \pmod{21}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11}; \\ x \equiv 4 \pmod{523}. \end{cases}$
9. Докажите, что для любого натурального числа n число $2^{4n+2}+1$ является составным.
10. При делении натурального числа n на 3 и на 37 получаются соответственно остатки 1 и 33. Найдите остаток при делении n на 111.

10 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 82605159; б) 27! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 33557 и 5727 (по алгоритму Евклида);

б) 115565, 386695 и 625145 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
а) 363 и 242 (по формуле);
б) 24, 96 и 16 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа n =400400.
5. Составить таблицы сложения и умножения по модулю 11.
6. Найти пятизначные числа, средние цифры которых составляют число 809, делящиеся на 55.
7. Решите сравнение:
а) $16x \equiv 13 \pmod{21}$, б) $9x \equiv 12 \pmod{15}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{13}; \\ x \equiv 29 \pmod{5209}. \end{cases}$
9. Какой цифрой оканчивается число 333^{333} ?
10. Докажите, что если натуральное число n не делится ни на 2, ни на 3, то $n^2 - 1$ делится на 24.

11 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
а) 23522499; б) 23! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
а) 67633 и 11139 (по алгоритму Евклида);
б) 15177999, 22333 и 414414 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
а) 705 и 625 (по формуле);
б) 90, 36 и 81 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n = 800800$.
5. Решите уравнение $\overline{2} \cdot \overline{x} = \overline{7}$ по модулю 8.
6. Найдите число вида $\overline{1ab71}$, где a и b - цифры, делящееся на 33.
7. Решите сравнение:
а) $7x \equiv 8 \pmod{15}$, б) $105x \equiv 70 \pmod{215}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3}; \\ x \equiv 3 \pmod{5}; \\ x \equiv 4 \pmod{7}. \end{cases}$
9. Какой цифрой оканчивается число 666^{666} ?
10. Докажите, что при любом целом неотрицательном n разность чисел $n^9 - n^5$ делится на 30.

12 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
а) 39353419; б) 22! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
а) 82170 и 55361 (по алгоритму Евклида);
б) 563369, 305615 и 190190 (через каноническое представление).

3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
а) 891 и 900 (по формуле);
б) 40, 48 и 64 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа n =160160.
5. Составьте таблицы сложения и умножения по модулю 10.
6. Найдите число натуральных чисел от 120 до 315, делящихся на 11.
7. Решите сравнение:
а) $2617x \equiv 2 \pmod{5237}$, б) $90x \equiv 36 \pmod{186}$.

8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$

9. Какой цифрой оканчивается число 444^{444}?

10. Докажите, что число $p^2 - q^2$, где p и q - простые числа, большие 3, делится на 24.

13 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 88325523; б) $28!$.
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 122377 и 12243 (по алгоритму Евклида);
   б) 992222, 181111 и 49049 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 124 и 747 (по формуле);
   б) 88, 42 и 12 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 320320.
5. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел вида $3n-1$.
6. Найдите количество натуральных чисел, не превосходящих числа 107 и не делящихся ни на одно из простых чисел 3, 5, 7.

7. Решите сравнение:
   а) $13x \equiv 5 \pmod{5573}$, б) $63x \equiv 84 \pmod{203}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 7; \\ x \equiv 3 \pmod 5; \end{cases}$
9. Докажите, что для любого натурального n дробь $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ несократима.

10. Докажите, что $2^{2^5}+1$ делится на 641.

14 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 50529479; б) $21!$.
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 70547 и 14457 (по алгоритму Евклида);
   б) 299999, 40001 и 170170 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 500 и 625 (по формуле);
   б) 64, 48 и 96 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 64064.
5. Решите уравнение: $\overline{2} \cdot \overline{x} = \overline{17}$ по модулю 20..
6. Представьте произведение всех натуральных чисел от 21 до 40 в виде произведения простых чисел.
7. Решите сравнение:
   а) $11x \equiv 1 \pmod{4391}$, б) $48x \equiv 80 \pmod{184}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3; \\ x \equiv 1 \pmod{11}; \end{cases}$
9. Найдите две последние цифры числа $7^{9^{9^9}}$.
10. Докажите, что $73^{12}-1$ делится на 105.

15 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 33362483; б) $29!$.
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 82295 и 58890 (по алгоритму Евклида);

б) 9147567, 47567 и 169169 (через каноническое представление).

3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 320 и 360 (по формуле);
   б) 24, 60 и 36 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 128128.
5. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4n-1$.
6. Докажите, что если a и b взаимно просты, то наибольший общий делитель чисел $11a+2b$ и $18a+5b$ равен либо 1, либо 19.
7. Решите сравнение:
   а) $40x \equiv 23 \pmod{613}$, б) $81x \equiv 108 \pmod{279}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{10}; \\ x \equiv 9 \pmod{14}; \\ x \equiv 13 \pmod{16}. \end{cases}$
9. Найти остаток от деления 5^{20} на 24.
10. Докажите, что $2^{121}-1$ делится на 727.

16 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 29032549; б) 32! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 192329 и 21627 (по алгоритму Евклида);
   б) 203093, 33660 и 110110 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 284 и 532 (по формуле);
   б) 25, 35, 45 и 15 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 12400.
5. Составить таблицы сложения и умножения по модулю 9.
6. Найти все трехзначные числа, каждая цифра которых является их простым делителем.
7. Решите сравнение:
   а) $15x \equiv 7 \pmod{523}$, б) $132x \equiv 33 \pmod{407}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{12}; \\ x \equiv 4 \pmod{5}; \\ x \equiv 7 \pmod{14}. \end{cases}$
9. Докажите, что при любом натуральном n число $37^{n+2}+16^{n+1}+23^{n}$ делится на 7.
10. Докажите, что если число делится на 99, то сумма его цифр не менее 18.

17 вариант

11. Найдите каноническое представление числа:
    а) 95851899; б) 30! .
12. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
    а) 72157 и 6077 (по алгоритму Евклида);
    б) 205139, 555500 и 121121 (через каноническое представление).
13. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
    а) 828 и 916 (по формуле);
    б) 12, 14 и 36 (через каноническое представление чисел).
14. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 720720.
15. Решите уравнение: $\overline{5}\cdot\overline{x}=\overline{6}$ по модулю 9.
16. Докажите, что при любом натуральном n число n^5-5n^3+4n делится на 120.
17. Решите сравнение:
    а) $8x \equiv 5 \pmod{509}$, б) $60x \equiv 75 \pmod{129}$.

18. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5; \\ x \equiv 3 \pmod 7; \\ x \equiv 6 \pmod{10}. \end{cases}$

19. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

20. Докажите, что $2^{131}-1$ делится на 263.

a. вариант

i. Найдите каноническое представление числа:

а) 43482439; б) 34! .

ii. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:

а) 36763 и 8633 (по алгоритму Евклида);

б) 1209374, 1414 и 404404 (через каноническое представление).

iii. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:

а) 424 и 312 (по формуле);

б) 32, 60 и 44 (через каноническое представление чисел).

iv. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 54054.

v. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $6n-1$.

vi. Дано: $[a,b] = 2496$, $(a,b) = 24$. Найдите a и b.

vii. Решите сравнение:

а) $4x \equiv 3 \pmod 7$, б) $84x \equiv 36 \pmod{188}$.

viii. Решите систему сравнений:

ix. Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток то деления n на 30 ?

x. Докажите, что $2^{5n}-1$делится на 31.

b. вариант

i. Найдите каноническое представление числа:

а) 47559897; б) 37! .

ii. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:

а) 95372 и 46330 (по алгоритму Евклида);

б) 2846459, 21021 и 539539 (через каноническое представление).

iii. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:

а) 404 и 520 (по формуле);

б) 52, 64 и 12 (через каноническое представление чисел).

iv. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 300300.

v. Составьте таблицы сложения и умножения по модулю 8.

vi. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

vii. Решите сравнение:

а) $37x \equiv 72 \pmod{11}$, б) $80x \equiv 60 \pmod{205}$.

viii. Решите систему сравнений:

$$\begin{cases} 17x \equiv 7 \pmod 2; \\ 17x \equiv 7 \pmod 3; \\ 17x \equiv 7 \pmod 5). \end{cases}$$

ix. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{34a5b}$ (a и b - цифры), которые делятся на 36.

x. Докажите, что $1^{11}+2^{11}+3^{11}+4^{11} = 0$ (mod 5).

c. вариант

i. Найдите каноническое представление числа:

а) 92245439; б) 35! .

ii. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:

а) 55257 и 19775 (по алгоритму Евклида);
б) 697918, 39000 и 260260 (через каноническое представление).

iii. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:

а) 890 и 220 (по формуле);
б) 22, 33 и 55 (через каноническое представление чисел).

iv. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 50400.

v. Решите уравнение: $\overline{7}\cdot\overline{x}=\overline{6}$ по модулю 9.

vi. Найдите четырехзначное число, которое при делении на 251 дает в остатке 201, а при делении на 252 дает в остатке 194.

vii. Решите сравнение:

а) $40x \equiv 93 \pmod{13}$, б) $72x \equiv 48 \pmod{174}$.

viii. Решите систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11}; \\ x \equiv 5 \pmod{7}. \end{cases}$$

ix. Найдите показатель степени простого числа 2 в каноническом представлении 500!

x. Докажите, что $1^{18}+2^{18}+3^{18}+4^{18}+5^{18}+6^{18} = -1$ (mod 7).

21 вариант

xi. Найдите каноническое представление числа:

а) 19080061; б) 41! .

xii. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:

а) 92981 и 13431 (по алгоритму Евклида);
б) 5147417, 77000 и 121121 (через каноническое представление).

xiii. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:

а) 630 и 422 (по формуле);
б) 56, 16, 68 и 12 (через каноническое представление чисел).

xiv. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 19800.

xv. Составьте таблицы сложения и умножения по модулю 7.

xvi. Найдите показатель, с которым 5 входит в каноническое представление числа 5258!

xvii. Решите сравнение:

а) $9x \equiv 6 \pmod{11}$, б) $140x \equiv 105 \pmod{301}$.

xviii. Решите систему сравнений:

$$\begin{cases} 7x \equiv 10 \pmod{11}; \\ 12x \equiv 7 \pmod{13}; \\ 7x \equiv 11 \pmod{15}. \end{cases}$$

xix. Докажите, что если натуральное число оканчивается цифрой 7, то оно не может быть квадратом целого числа.

xx. Докажите, что $1^{16}+3^{16}+7^{16}+9^{16} \equiv 4 \pmod{10}$.

22 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 84017213; б) 43! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 50058 и 38110 (по алгоритму Евклида);
   б) 863447, 91000 и 169169 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 316 и 424 (по формуле);
   б) 18, 44 и 56 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 315000.
5. Сколькими нулями оканчивается число 120! ?
6. Докажите, что для любых натуральных n и m выражение $n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)$ делится на $(m+1)!$.
7. Решите сравнение:
   а) $53x \equiv 43 \pmod{2401}$, б) $70x \equiv 42 \pmod{133}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} 13x \equiv 5 \pmod{47}; \\ 5x \equiv 2 \pmod{8}; \\ 2x \equiv 7 \pmod{15}. \end{cases}$
9. Найдите остаток от деления числа 5^{704} на 101.
10. Пусть p и q - два последовательных простых числа. Может ли их сумма быть простым числом ?

23 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 16476691; б) 18! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 59231 и 14579 (по алгоритму Евклида);
   б) 610925, 3500 и 175175 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 518 и 624 (по формуле);
   б) 36, 45 и 27 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 15600.
5. Выпишите приведенную систему наименьших неотрицательных вычетов по модулю 18.
6. Докажите, что для любого натурального n дробь $\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$ несократима.
7. Решите сравнение:
   а) $41x \equiv 37 \pmod{1331}$, б) $72x \equiv 24 \pmod{248}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} 2x \equiv 12 \pmod{14}; \\ 3x \equiv 6 \pmod{39}. \end{cases}$
9. Найдите остаток от деления числа 7^{100} на 11.
10. Докажите, что $1^{14}+5^{14}+7^{14}+11^{14} \equiv 4 \pmod{12}$.

24 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 36352953; б) 42! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 64897 и 13843 (по алгоритму Евклида);
   б) 3854550, 63000 и 315315 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 480 и 324 (по формуле);
   б) 32, 20 и 12 (через каноническое представление чисел).

4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 500500.
5. Выпишите приведенную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 18.
6. Докажите, что для любых натуральных a и b имеет место равенство $(a,b) = (23a + 22b, a + b)$.
7. Решите сравнение:
   а) $19x \equiv 20 \pmod{121}$, б) $180x \equiv 135 \pmod{369}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{17}; \\ 3x \equiv 6 \pmod{9}. \end{cases}$
9. Некоторое число записывается в десятичной системе счисления с помощью 300 единиц и некоторого количества нулей. Может ли оно быть полным квадратом ?
10. Докажите, что числа 593^{100} и 1147^{100} при делении на 277 дают равные остатки. Найдите этот остаток.

25 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 54987163; б) 44! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 96835 и 39590 (по алгоритму Евклида);
   б) 9372060, 15000 и 360360 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 960 и 310 (по формуле);
   б) 15, 55 и 40 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 71500.
5. Составьте таблицы сложения и умножения по модулю 16.
6. Докажите, что для любых натуральных n и m число $m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$ делится на 30.
7. Решите сравнение:
   а) $31x \equiv 15 \pmod{343}$, б) $165x \equiv 99 \pmod{319}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{15}; \\ x \equiv 1 \pmod{12}; \\ x \equiv 7 \pmod{14}. \end{cases}$
9. Найдите две последние цифры числа 237^{401}.
10. Докажите, что $1^{17}+3^{17}+5^{17}+9^{17}+11^{17}+13^{17} \equiv 0 \pmod{14}$.

26 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 86537633; б) 39! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 139253 и 18471 (по алгоритму Евклида);
   б) 2957375, 12800 и 390625 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 740 и 366 (по формуле);
   б) 36, 24 и 28 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 663000.
5. Сколькими нулями оканчивается число 110! ?
6. Докажите, что для любого натурального n число $n^2 + n - 1$ не делится на 3.
7. Решите сравнение:
   а) $23x \equiv 13 \pmod{625}$, б) $84x \equiv 63 \pmod{177}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{7}; \\ x \equiv 5 \pmod{11}; \\ x \equiv 13 \pmod{17}. \end{cases}$
9. Найдите две последние цифры числа 243^{802}.
10. Докажите, что $1^{13}+5^{13}+7^{13}+11^{13} \equiv 0 \pmod{12}$.

27 вариант

21. Найдите каноническое представление числа:
    а) 34523489; б) 33! .
22. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
    а) 93890 и 74333 (по алгоритму Евклида);
    б) 1346709, 3003 и 910910 (через каноническое представление).
23. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
    а) 444 и 226 (по формуле);
    б) 72, 78 и 16 (через каноническое представление чисел).
24. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n = 2793$.
25. Составить таблицы сложения и умножения по модулю 17.
26. Докажите, что для любых натуральных a и b имеет место равенство: $(a, b) = (15a + 16b, a + b)$.
27. Решите сравнение:
    а) $17x \equiv 35 \pmod{81}$, б) $100x \equiv 60 \pmod{212}$.
28. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{13}; \\ x \equiv 1 \pmod{5}; \\ x \equiv 7 \pmod{12}. \end{cases}$
29. Докажите, что при любом целом $n \neq 1$ число $n^4 + 4$ составное.
30. Докажите, что $2^{131} - 1$ делится на 263.

28 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
    а) 24566003; б) 36! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
    а) 82063 и 38223 (по алгоритму Евклида);
    б) 1444373, 3087000 и 343343 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
    а) 415 и 620 (по формуле);
    б) 34, 26 и 18 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n = 55125$.
5. Решите уравнение $\overline{6} \cdot \overline{x} = \overline{8}$ по модулю 12.
6. Докажите, что для любого натурального n число $n^2 + 1$ не делится на 9.
7. Решите сравнение:
    а) $7x \equiv 2 \pmod{13}$, б) $99x \equiv 66 \pmod{209}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 13 \pmod{16}; \\ x \equiv 3 \pmod{10}; \\ x \equiv 9 \pmod{14}. \end{cases}$
9. Найдите остаток от деления числа 3^{402} на 101.
10. Докажите, что $1^{11}+2^{11}+4^{11}+5^{11}+7^{11}+8^{11} \equiv 0 \pmod{9}$.

29 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
    а) 64978641; б) 17! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
    а) 29279 и 2747 (по алгоритму Евклида);
    б) 52013269, 1101100 и 557700 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
    а) 290 и 436 (по формуле);
    б) 44, 56, 82 и 16 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n = 58653$.
5. Выпишите приведенную систему наименьших неотрицательных вычетов по модулю 20.
6. Докажите, что для любых натуральных a и b имеет место равенство $(a, b) = (3a + 5b, 8a + 13b)$.
7. Решите сравнение:

а) $3x \equiv 5 \pmod{11}$, б) $180x \equiv 72 \pmod{423}$.

8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7; \\ x \equiv 2 \pmod{11}; \\ x \equiv 5 \pmod{13}. \end{cases}$

9. Некоторое натуральное четное число при делении на 3 дает в остатке 1. Чему равен остаток от деления этого числа на 6 ?

10. Найдите остаток от деления 227^{8613} на 32.

30 вариант

1. Найдите каноническое представление числа:
   а) 57009953; б) 45! .
2. Найдите наибольший общий делитель систем чисел:
   а) 86110 и 66817 (по алгоритму Евклида);
   б) 37439215, 82500 и 55055 (через каноническое представление).
3. Найдите наименьшее общее кратное систем чисел:
   а) 406 и 912 (по формуле);
   б) 90, 60, 15 и 36 (через каноническое представление чисел).
4. Найдите число делителей, сумму делителей и значение функции Эйлера для числа $n =$ 30030.
5. Выпишите приведенную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 20.
6. Докажите, что для любых натуральных a и b имеет место равенство: $(a, b) = (7a + 2b, 3a + b)$.
7. Решите сравнение:
   а) $4x \equiv 6 \pmod{11}$, б) $120x \equiv 160 \pmod{296}$.
8. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{11}; \\ x \equiv 3 \pmod{10}; \\ x \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$
9. Из десятичного разложения дроби $1/p$ ($p > 5$ - простое число) вычеркнули 2000-ную цифру. В результате получилось десятичное разложение несократимой дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что b делится на p.
10. Найдите три последние цифры числа 654^{321}.