Министерство образования Российской Федерации

Дальневосточный государственный университет

А.И. Абакумов

Модели Неймана - Гейла

Владивосток

2004

УДК 519.95

Абакумов А.И. Модели Неймана - Гейла. Владивосток: ДВГУ, 2004. 44 с.

Математические модели экономической динамики используют технику многозначных квазилинейных отображений. Основным результатом модельных исследований являются теоремы о магистралях.

Для студентов математических специальностей, научных работников и преподавателей, занимающихся математическим моделированием экономических процессов.

Содержание

Обозначения

X, Y - конечномерные нормированные пространства;

N - множество натуральных чисел;

R - множество действительных чисел;

$A \times B$ - декартово произведение множеств A и B;

$\{x \mid T(x)\}$ - множество таких элементов x, которые обладают свойством $T(x)$;

$h : A \to B$ - отображение h множества A в множество B;

Для $D \subset A \times B$ обозначено:

$Pr_1 D = \{x \in A \mid \exists\ y \in B \quad (x, y) \in D\}$,

$Pr_2 D = \{y \in B \mid \exists\ x \in A \quad (x, y) \in D\}$;

$h \circ g$ - суперпозиция отображений $g : A \to B$ и $h : B \to C$;

$\bar{D}$ - замыкание множества D;

$\overset{o}{D}$ - множество всех внутренних точек для множества D;

$r(D)$ - множество всех относительно внутренних точек для множества D;

$a(D)$ - аффинная оболочка множества D;

$c(D)$ - выпуклая оболочка множества D;

$C(D)$ - коническая оболочка множества D;

$S = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$ - единичный шар в пространстве X;

$\partial S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ - единичная сфера в пространстве X;

X^* - пространство линейных функционалов на пространстве X.

Для $D, G \subset X, \alpha \in R$ обозначено:

$D + G = \{x \in X | \exists y \in D, \exists z \in G\ x = y + z\}$,

$\alpha D = \{x \in X | \exists y \in D\ x = \alpha y\}$;

$P(D)$ - множество всех подмножеств множества D.

Введение

Математическое моделирование экономической динамики и равновесия имеет многолетнюю историю [9]. Классические модели основаны на функциональных и дифференциальных уравнениях [4]. Некоторые разделы математики, например, теория оптимизации, развивались под воздействием необходимости математического моделирования экономических процессов [1,4]. В более позднее время появились, в частности, математические модели, связанные с понятием многозначного отображения [5,6]. Именно последнему классу моделей посвящено это учебное пособие. Основное содержание определяется теоремами о магистральных свойствах оптимальных решений в моделях экономической динамики. Сами модели Неймана-Гейла описываются с помощью многозначных отображений. Для полного изложения теорем о магистралях рассматриваются свойства квазилинейных многозначных отображений, подходящих к описанию экономической динамики. Изучается ряд сопутствующих понятий: суперлинейные и сублинейные функционалы, опорные множества линейных функционалов и т.п.

Автор в основном следует работам [5, 6], но для связности и большей автономности изложения сведений о многозначных отображениях и теорем о магистралях пришлось добавить ряд теорем, утверждений и в необходимых случаях их доказательств. Для краткого и ясного рассказа пришлось часть доказательств переделать с целью использования минимального набора дополнительных сведений.

Наиболее часто используемые обозначения приведены в начале отдельно. Конечно, этот список не полон. Часть обозначений вводится прямо по тексту. Есть не совсем обычные символы. Например, конец доказательства обозначается $\diamondsuit$. Таких значков немного, все они поясняются. Вместе с тем автор надеется на знание читателем основных понятий и обозначений из математического или функционального анализов [2, 8].

Автор надеется, что эта работа послужит популяризации тех модельных разработок для экономических процессов, которые достаточно давно появились, но в силу разных причин мало используются специалистами по математическому моделированию экономических процессов. Представленный материал является основой полугодового спецкурса, может служить частью курса математического моделирования или курса математических методов в экономике.

I Основные понятия

1.1 Конусы и функционалы

Основным объектом наших исследований будет конечномерное нормированное пространство X над полем R действительных чисел. Для $x, y \in X$ и множества $A \subset R$ обозначим $\xi_A(x, y) = \{(1-\alpha)x + \alpha y | \alpha \in A\}$. Отсюда получаем следующие понятия: **отрезок** $[x; y]$ при $A = [0; 1]$, **луч** $[x; y)$ при $A = [0, \infty)$, **прямую** (x, y) при $A = (-\infty, \infty)$.

Множество D **выпукло**, если $\forall x, y \in D \quad [x, y] \subset D$.

Множество D называется **конусом** с вершиной в точке x, если $\forall y \in D$ луч $[x, y)$ содержится в множестве D.

Множество D называется **плоским** множеством (аффинным многообразием), если $\forall x, y \in D$ прямая $(x, y) \in D$.

Множество $H \subset X$ называется **гиперплоскостью**, если это максимальное плоское множество, не совпадающее со всем пространством X.

В конечномерном нормированном пространстве X **функционалом** будем называть отображение $p : D \to R$ для некоторого множества $D \subset X$. Функционал p называется **линейным**, если $D = R$ и $\forall\ \alpha, \beta \in R,\ x, y \in X$ выполняется равенство $p(\alpha x + \beta y) = \alpha p(x) + \beta p(y)$. Функционал p называется **непрерывным**, если он непрерывен в каждой точке x множества D. А последнее означает, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ U_\varepsilon(x)$ - такая окрестность точки x, что $\forall\ y \in U_\varepsilon(x) \cap D$ выполняется неравенство

$$|p(y) - p(x)| < \varepsilon.$$

Функционал p называется **ограниченным**, если образ любого ограниченного в D множества является ограниченным в R. Линейный функционал всегда оказывается непрерывным и ограниченным [8]. Пространство X^* таких функционалов тоже является конечномерным нормированным пространством той же размерности, что и X.Для любой гиперплоскости H существует такой ненулевой линейный функционал $\varphi \in X^*$ и число $\alpha \in R$, что $H = \{x \in X | \varphi(x) = \alpha\}$ [8]. Всякая гиперплоскость определяет два открытых или замкнутых полупространства в пространстве X.

Для множества $D \subset X$ его **аффинная оболочка** $a(D)$ определяется как пересечение всех аффинных многообразий, содержащих D. **Относительная внутренность** $r(D)$ множества D - это множество всех **относительно внутренних точек**, то есть тех точек, для которых пересечение некоторой окрестности точки с аффинной оболочкой D содержится в D. Известно [6], что всякое непустое выпуклое множество $D \subset X$ имеет $r(D) \neq \emptyset$.

Напомним, что внутренность множества D в обычном смысле обозначается $\overset{o}{D}$. Множество D называется **телесным**, если $\overset{o}{D} \neq \emptyset$.

Говорят, что гиперплоскость H **разделяет (строго разделяет)** множества D_1, D_2, если D_1, D_2 лежат в разных замкнутых (открытых) полупространствах, определяемых гиперплоскостью H.

Нам понадобятся следующие известные **теоремы отделимости множеств** в пространстве X [2, 6, 8].

1.Пусть D_1, D_2 - выпуклые подмножества в пространстве X, причем $r(D_1) \cap r(D_2) = \emptyset$. Тогда существует гиперплоскость H, разделяющая D_1 и D_2.

2.Пусть D_1, D_2 - выпуклые замкнутые непересекающиеся подмножества в X, причём хотя бы одно из них ограничено. Тогда существует гиперплоскость H, строго их разделяющая.

Гиперплоскость H называется **опорной** к множеству D в точке x, если $x \in H$ и множество D содержится в одном из замкнутых полупространств, определяемых H. Точка x называется **относительно граничной** для множества D, если $x \in \bar{D} \setminus r(D)$. Нам потребуется тот факт, что для любой относительно граничной точки x выпуклого множества D существует гиперплоскость, опорная к D в точке x.

Постоянным объектом наших исследований будет выпуклый замкнутый **конус K с вершиной в точке 0.** Это значит, что $0 \in K$ и $\forall x \in K\ \forall \alpha > 0\ \alpha x \in K$. В дальнейшем все конусы будут именно такими. Приведем формулировку теоремы отделимости для случая, когда одно из множеств является конусом, Именно в таком виде она потребуется нам в дальнейшем наиболее часто.

Теорема отделимости для конуса. Для выпуклого замкнутого конуса K и непересекающегося с ним выпуклого замкнутого множества D существует разделяющая их гиперплоскость H, проходящая через вершину конуса. При этом конус K лежит в одном замкнутом полупространстве, а множество D - в другом открытом полупространстве.
На языке функционалов это означает, что существует такой линейный функционал φ, что $\forall x \in K \varphi(x) \geq 0$, а $\forall y \in D \varphi(y) < 0$.

Конус K называется **выступающим**, если из $x, -x \in K$ следует $x = 0$. Конус K называется **воспроизводящим**, если $K - K = X$. Конус является воспроизводящим тогда и только тогда, когда он телесный.

Через $K^* \subset X^*$ обозначим множество $K^* = \{\varphi \in X^* \mid \forall x \in K\ \varphi(x) \geq 0\}$.

Если задан выпуклый выступающий конус $K \subset X$, то можно определить отношение частичного порядка $x \leq_K y$: $x \leq_K y \Longleftrightarrow y - x \in K$.
Для этого отношения выполняются свойства:
1) рефлексивности $x \leq x$;
2) антисимметричности $x \leq_K y,\ y \leq_K x\ \Rightarrow\ y = x$ (это следует из того факта, что K - выступающий конус);
3) транзитивности $x \leq_K y,\ y \leq_K z\ \Rightarrow\ x \leq_K z$ (это следует из выпуклости множества K; действительно, $y - x \in K, z - y \in K\ \Rightarrow\ z - x = (y - x) + (z - y) \in K$).
Указанный порядок является, вообще говоря, частичным. Индекс "K" у символа "$\leq$" в дальнейшем будем опускать, если это не вызовет путаницы в понимании.

Определим **конусный отрезок** относительно конуса K как множество $\langle x, y\rangle_K = \{z \in X | x \leq_K z \leq_K y\}$. Здесь индекс "$K$" также будет опускаться, если это не вызовет недоразумений.

Каждый линейный функционал из X^{**} на пространстве X^* может быть отождествлен с элементом $x \in X$: $\forall\ \varphi \in X^*\ \ x(\varphi) = \varphi(x)$. Это отождествление есть изоморфизм пространств X^{**} и X, сохраняющий норму [2, 8]. С учетом такого отождествления выполняется равенство $K^{**} = K$ для всякого выпуклого замкнутого конуса K.

Введём следующие обозначения: $c(D)$ - это **выпуклая оболочка** множества D, то есть это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество D; **конической оболочкой** $C(D)$ множества D называется пересечение всех выпуклых конусов, включающих D. Из определений следует, что $c(D)$ - выпуклое множество, а $C(D)$ - выпуклый конус [6, 7].

Функционал $p : D \to R$ называется **полунепрерывным сверху (снизу)** в точке x, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U_\varepsilon(x)$ точки x, что $\forall y \in U_\varepsilon(x) \cap D,\ p(y) \leq p(x) + \varepsilon\ (p(y) \geq p(x) - \varepsilon)$.

Пусть множество D выпукло. Функционал p называется **выпуклым (вогнутым)**, если $\forall x, y \in D, \alpha \in [0; 1]$, выполняется неравенство

$$p((1-\alpha)x+\alpha y) \leq (1-\alpha)p(x)+\alpha p(y) \quad (p((1-\alpha)x+\alpha y) \geq (1-\alpha)p(x)+\alpha p(y)). \tag{1}$$

Функционал p называется **строго выпуклым (строго вогнутым)**, если неравенства (1) строгие для $\alpha \in (0; 1)$.

Известна следующая

Теорема о минимаксе [6]. Пусть X, Y - конечномерные нормированные пространства, D - выпуклое компактное множество в X, G - выпуклое множество в Y. Пусть задан функционал $p : D \times G \to R$, вогнутый по x и выпуклый по y, а также полунепрерывный сверху по x. Тогда

$$\max_{x \in D} \inf_{y \in G} p(x, y) = \inf_{y \in G} \max_{x \in D} p(x, y).$$

1.2 Суперлинейные функционалы и опорные множества

Рассматриваем конечномерное нормированное пространство X. В этом разделе постоянно фигурирует выпуклый замкнутый конус $K \subset X$.

Функционал $p : K \to R$ называется **суперлинейным**, если он супераддитивен $p(x+y) \geq p(x) + p(y)$, положительно однороден $p(\alpha x) = \alpha\ p(x)$ для $\alpha > 0$, полунепрерывен сверху.

Функционал p **сублинеен**, если он субаддитивен $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, положительно однороден, полунепрерывен снизу.

Через $\Phi(K)$ обозначим множество суперлинейных функционалов на конусе K, а через $\Psi(K)$ - множество сублинейных функционалов на конусе K.

Для конуса $K \subset X$ и непустого множества $U \subset X^*$ определим следующий функционал на этом конусе:

$$\forall x \in K\ p_U(x) = \inf_{\varphi \in U} \varphi(x). \tag{2}$$

При этом если $p_U(x) = -\infty$, то будем считать, что функционал p_U в этой точке x не определён.

Утверждение о суперлинейном функционале. Если функционал p_U определён на всём выпуклом замкнутом конусе K, то этот функционал p_U является суперлинейным.

Доказательство. Если функционал p_U определён на конусе K, то его супераддитивность и положительная однородность следуют из определений точной нижней границы и линейности функционалов из множества $U \subset X^*$. Полунепрерывность сверху для функционала p_U следует из непрерывности линейных функционалов. Действительно, пусть для $\varepsilon > 0$ существует $x \in K$ и такая последовательность $(x_k)_{k=1}^{\infty},\ x_k \to x,\ x_k \in K$, что

$$\inf_{\varphi \in U} \varphi(x_k) > \inf_{\varphi \in U} \varphi(x) + \varepsilon.$$

С другой стороны, для всех $\varphi \in U$ и достаточно больших k

$$\varphi(x_k) \leq \varphi(x) + \varepsilon.$$

Из последнего неравенства для фиксированного k следует $\inf\limits_{\varphi \in U} \varphi(x_k) \leq \inf\limits_{\varphi \in U} \varphi(x) + \varepsilon$. Это противоречит предыдущему предположению. Полунепрерывность сверху для p_U доказана. $\diamondsuit$

Функционал $\varphi \in X^*$ называется **опорным** к суперлинейному функционалу $p \in \Phi(K)$, если $\forall x \in K$ $\varphi(x) \geq p(x)$. Через U_p обозначим множество всех опорных к p линейных функционалов из X^*.

Теорема Фенхеля. Для всякого $p \in \Phi(K)$ множество U_p непусто и $\forall x \in K \quad p(x) = \inf\limits_{\varphi \in U_p} \varphi(x)$.

Доказательство. Обозначим через $Z_p = \{(x, \alpha) \in X \times R \mid x \in K,\ \alpha \leq p(x)\}$ подграфик функционала p. Для $p \in \Phi(K)$ множество Z_p является выпуклым замкнутым конусом.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $y \in K$ $(y, p(y)+\varepsilon) \notin Z_p$ и по теореме отделимости для конуса существует такой линейный функционал $\psi \in (X \times R)^*$, что $\psi(x, \alpha) \geq 0$ для $(x, \alpha) \in Z_p$ и $\psi(y, p(y) + \varepsilon) < 0$ для $y \in K$.

Пусть $\psi = (\varphi, \beta),\ \varphi \in X^*,\ \beta \in R^*$. Тогда для всех $x, y \in K$ выполняются неравенства

$$\varphi(x) + \beta p(x) \geq 0,\ \varphi(y) + \beta(p(y) + \varepsilon) < 0.$$

Возьмём $x = y$ и получим $\beta < 0$. Тогда для всех $x \in K$ выполняется $-\frac{1}{\beta}\varphi(x) \geq p(x)$. Отсюда следует, что $-\frac{1}{\beta}\varphi \in U_p$, то есть множество U_p непусто.

Далее из неравенства $-\frac{1}{\beta}\varphi(y) < p(y) + \varepsilon$ следует $p(x) = \inf\limits_{\varphi \in U_p} \varphi(x)$. $\diamondsuit$

Для выпуклого замкнутого конуса $K \subset X$ множество D называется **K-устойчивым**, если $D + K = D$. Множество $U \subset X^*$ называется **K-опорным**, если U выпукло, замкнуто, K^*-устойчиво и $\forall x \in K \ \inf\limits_{\varphi \in U} \varphi(x) > -\infty$.

Непосредственно из определений вытекает следующий факт: если $p \in \Phi(K)$, то множество $U_p - K$-опорное.
Из утверждения о суперлинейном функционале получаем: если $U \subset X^*, U - K$-опорное, то функционал p_U суперлинеен.

Лемма о функционале p_U. Если множества $U_1, U_2 \subset X^*$ являются K-опорными, то из неравенства $U_1 \neq U_2$ следует неравенство $p_{U_1} \neq p_{U_2}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in U_1,\ \varphi \notin U_2$. Тогда по теоремам отделимости множеств найдется такой $x \in X$, что $\inf\limits_{\psi \in U_2} \psi(x) > \varphi(x)$ (в случае необходимости множества U_1 и U_2 следует поменять местами). Покажем, что $x \in K$. Пусть $K \neq X$. Если $x \notin K$, то по теореме отделимости для конуса существует такой функционал $\psi \in X^*$, что $\psi(y) \geq 0$ для $y \in K$ и $\psi(x) < 0$. Тогда $\psi \in K^*$. Пусть $\chi \in U_2$. Тогда $\forall \alpha > 0 \quad \chi + \alpha\psi \in U_2,\ \varphi(x) < \inf\limits_{\psi \in U_2} \psi(x) \leq \inf\limits_{\alpha > 0} (\chi + \alpha\psi(x)) = -\infty$, что невозможно. Отсюда следует, что $x \in K$. Тогда $p_{U_2}(x) = \inf\limits_{\psi \in U_2} \psi(x) > \varphi(x) \geq \inf\limits_{\psi \in U_1} \psi(x) = p_{U_1}(x) \Rightarrow p_{U_1} \neq p_{U_2}$. $\diamondsuit$

Обозначим $P\Phi(K)$ совокупность всех K-опорных подмножеств из X^*. Для $U \in P\Phi(K)$ положим

$$g(U) = p_U.$$

Теорема об отображении g. Отображение $g : P\Phi(K) \to \Phi(K)$ является взаимно однозначным отображением на все множество $\Phi(K)$.

Доказательство. Для любого K-опорного множества U функционал p_U определяется однозначно и является суперлинейным. Для любого суперлинейного функционала p множество U_p является K-опорным. Следовательно, g - отображение на все $\Phi(K)$. Его взаимная однозначность следует из леммы о функционале p_U. $\diamondsuit$

1.3 Сублинейные функционалы

Напомним, что функционал $q : K \to R$ называется **сублинейным**, если он субаддитивен $q(x+y) \le q(x) + q(y)$, положительно однороден $\forall\ \alpha > 0\ q(\alpha x) = \alpha q(x)$ и полунепрерывен снизу.
Если функционал q сублинеен, то $-q$ суперлинеен.

Линейный функционал $\varphi \in X^*$ назовем **субопорным** к сублинейному функционалу q, если $\forall\ x \in K \ \ \varphi(x) \le q(x)$.

Совокупность всех сублинейных функционалов на конусе K обозначена $\Psi(K)$. Множество всех субопорных к q функционалов $\varphi \in X^*$ обозначим V_q.

Аналогично теореме Фенхеля доказывается

Теорема о сублинейных функционалах. Если $\quad q \in \Psi(K)$, то $V_q \neq \emptyset$ и $\forall\ x \in K \qquad q(x) = \sup\limits_{\varphi \in V_q} \varphi(x)$.

Множество $V \subset X^*$ называется K**-субопорным**, если оно выпукло, замкнуто, $(-K^*)$ - устойчиво, и $\forall x \in K \quad \sup\limits_{\varphi \in V} \varphi(x) < +\infty$. Совокупность всех K-субопорных множеств обозначим $Q\Psi(K)$. Для $V \in Q\Psi(K)$ положим

$$h(V) = q_V, \quad \text{где} \quad q_V(x) = \sup_{\varphi \in V} \varphi(x).$$

Аналогично теореме об отображении g доказывается

Теорема об отображении h**.** Отображение $h : Q\Psi(K) \to \Psi(K)$ является взаимно однозначным отображением на все множество $\Psi(K)$.

Пусть q - сублинейный функционал на конусе K. Обозначим

$$V_q^+ = V_q \cap K^*.$$

Оказывается, что множество V_q^+ непусто тогда и только тогда, когда q принимает на K неотрицательные значения.

Функционал $q \in \Psi(K)$ называется **монотонным**, если из неравенства $x \le_K y$ следует $q(x) \le q(y)$.

Теорема о монотонных сублинейных функционалах. Пусть q - монотонный сублинейный функционал на воспроизводящем конусе K. Тогда для $x \in K$ справедливо

$$q(x) = \sup_{\varphi \in V_q^+} \varphi(x).$$

Доказательство. По теореме о сублинейных функционалах $q(x) = \sup\limits_{\varphi \in V_q} \varphi(x)$. Из монотонности функционала q следует: $\forall\ x \in K \quad x \geq_K 0 \Rightarrow q(x) \geq q(0) = 0 \Rightarrow V_q^+ \neq \emptyset$. Положим

$$\tilde{q}(x) = \sup_{\varphi \in V_q^+} \varphi(x).$$

Предполагаем от противоположного, что $\exists\ x_0 \in K$:

$$\tilde{q}(x_0) < q(x_0). \tag{3}$$

Выберем такое число γ, что $\tilde{q}(x_0) < \gamma < q(x_0)$. Рассмотрим: $Z_q = \Big\{(x, \beta) \in X \times R^1 |\ x \in K, \quad \beta \geq q(x)\Big\}$ - надграфик функционала q. Образуем: $Z_0 = \Big\{(x, \beta) \in X \times R^1 |\ x \in x_0 + K, \beta = \gamma\Big\}$. Так как q - сублинейный функционал, то Z_q - выпуклый замкнутый конус, Z_0 - выпуклое замкнутое множество.

Проверим, что $Z_q \cap Z_0 = \emptyset$. Пусть $(y, \nu) \in Z_q \cap Z_0$, тогда $y \geq_K x_0, \quad \nu = \gamma, \quad y \in K, \quad \nu \geq q(y)$. В этом случае из монотоности q следует $\gamma = \nu \geq q(y) \geq q(x_0) > \gamma$, что невозможно. Отсюда $Z_q \cap Z_0 = \emptyset$.

По теореме отделимости для конуса существует такой функционал $(\varphi, \mu) \in (X \times R^1)^*$, $(\varphi, \mu) \neq 0$, что (выбираем функционал противоположного знака по сравнению с формулировкой теоремы об отделимости)

$$\varphi(x) + \mu\beta \leq 0,\ \beta \geq q(x),\ \varphi(x) + \varphi(x_0) + \mu\gamma > 0 \quad \text{для} \quad x \in K. \tag{4}$$

Отсюда следует ограниченность снизу функционала φ на конусе K, что означает $\varphi \in K^*$.

Покажем, что $\mu \neq 0$. В противном случае $\forall\ x \in K \quad \varphi(x) \leq 0$, но тогда из $\varphi \in K^*$ следует $\forall\ x \in K \quad \varphi(x) = 0$ Так как K - воспроизводящий конус, то тогда $\varphi \equiv 0$ на X. В этом случае $(\varphi, \mu) = 0$, чего быть не может. Отсюда следует $\mu \neq 0$.
Если $\mu > 0$, то для подходящего $x_1 \in K$ и $\beta \geq q(x_1)$ получаем $\varphi(x_1)+\mu\beta > 0$, что противоречит (4). Отсюда $\mu < 0$ и без ограничения общности можно считать $\mu = -1$.
Тогда из (4) следует, что $\varphi \in V_q$ (так как можно выбрать $\beta = q(x)$), а отсюда $\varphi \in V_q^+$. С другой стороны, из (3) и (4) при $x = 0$ получаем $\varphi(x_0) \geq \gamma > \tilde{q}(x_0)$. Это противоречит определению $\tilde{q}$, следовательно, (3) невозможно. $\diamondsuit$

1.4 Нормальные множества

Выпуклое компактное подмножество D конуса K назовём **нормальным** (в смысле K), если

$$(D - K) \cap K = D.$$

Через nD обозначим нормальную оболочку множества D, то есть пересечение всех нормальных множеств, содержащих множество D.

Утверждение о нормальных множествах. Выпуклое компактное подмножество D конуса K нормально тогда и только тогда, когда $\forall\ x \in D\ \langle 0, x\rangle \subset D$.

Доказательство. Заметим, что $\langle 0, x\rangle = (x - K) \cap K$.
Необходимость. Пусть множество D нормально. Если $x \in D$, то $x - K \subset D - K$, а отсюда следует, что $\langle 0, x\rangle = (x - K) \cap K \subset (D - K) \cap K = D$.
Достаточность. Пусть $\forall x \in D$ выполняется $\langle 0, x\rangle \subset D$. Пусть $z \in (D - K) \cap K$. Тогда найдется такое $x \in D$, что $z \in (x - K) \cap K = \langle 0, x\rangle \subset D$. Отсюда следует, что $z \in D$ и $(D - K) \cap K \subset D$. Обратное включение следует из $D \subset K$ и $D = D - 0 \subset D - K$. Утверждение доказано. $\diamondsuit$

1.5 Многозначные отображения

Рассматриваются два конечномерных нормированных пространства X, Y. Для множества $G \subset Y$ через $P(G)$ обозначаем множество всех подмножеств множества G. Задано отображение $f : D \to P(G),\ D \subset X,\ G \subset Y$, это отображение f мы будем называть **многозначным**.
График f есть множество $Z = \big\{(x, y) \in D \times G \mid x \in D,\ y \in f(x)\big\}$.
Обратное многозначное отображение определяется обычным образом: $f^{-1}(y) = \{x \in D|\ y \in f(x)\}$, для $y \in f(D)$.
При этом $f^{-1} : G \to P(D)$, его график есть множество $Z^{-1} = \big\{(y, x) \in f(D) \times D|\ (x, y) \in Z\big\}$.
Отображение f называется **замкнутым**, если множество Z замкнуто.
Отображение f называется **ограниченным**, если f отображает ограниченные множества в ограниченные.

Далее в этом разделе рассматриваются выпуклые замкнутые выступающие воспроизводящие конусы K, Q в пространствах X, Y соответственно.

Многозначное отображение $f : K \to P(Q)$ называется **квазилинейным**, если это отображение супераддитивно $\forall x_1, x_2 \in K\ f(x_1) + f(x_2) \subset f(x_1 + x_2)$, положительно однородно $\forall \alpha > 0, \forall x \in K\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$, замкнуто, гейловское $f(0) = \{0\}$, невырожденное $f(K) \cap \overset{o}{Q} \neq \emptyset$.

Обозначим через $F(K, Q)$ множество квазилинейных многозначных отображений $f : K \to P(Q)$.

Квазилинейное отображение $f : K \to P(Q)$ является ограниченным. Отсюда следует, что $\forall x \in K$ множество $f(x)$ компактно. Тогда для $\psi \in Q^*$ определим

$$p_\psi(x) = \max_{y \in f(x)} \psi(y). \tag{5}$$

Утверждение о многозначных отображениях и функционалах. Если f - квазилинейное отображение, $f \in F(K, Q)$, $\psi \in Q^*$, то формула (5) определяет суперлинейный функционал p_ψ на конусе K.

Доказательство. Последовательно доказываем свойства суперлинейности.

1) $p_\psi(x_1+x_2) = \max\limits_{y\in f(x_1+x_2)} \psi(y) \geq \max\limits_{y_1\in f(x_1),\ y_2\in f(x_2)} (\psi(y_1)+\psi(y_2)) = \max\limits_{y_1\in f(x_1)} \psi(y_1) + \max\limits_{y_2\in f(x_2)} \psi(y_2) = p_\psi(x_1)+p_\psi(x_2)$. Этим доказана супераддитивность функционала p_ψ. При доказательстве использована супераддитивность многозначного отображения f.

2) Положительная однородность p_ψ следует из положительной однородности f и линейности ψ.

3) Докажем полунепрерывность сверху функционала p_ψ. Пусть $(x_k)_{k=1}^\infty$, $x_k \in K, y_k \in f(x_k)$ с условием $\psi(y_k) = p_\psi(x_k)$ и $x_k \to x_0$ при $k\to\infty$. Множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$ ограничено. Множество $f(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x_k\})$ ограничено. Тогда последовательность $(y_k)_{k=1}^\infty$ имеет сходящуюся подпоследовательность $(y_{k_l})_{l=1}^\infty$, $y_{k_l}\to y_0$ при $l\to\infty$. Из замкнутости f следует, что $y_0\in f(x_0)$, и тогда $\psi(y_0) \leq \max\limits_{y\in f(x_0)} \psi(y)) = p_\psi(x_0)$. Отсюда следует $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} p_\psi(x_k) \leq p_\psi(x_0)$, что означает полунепрерывность сверху функционала p_ψ в точке x_0.$\diamondsuit$

Пусть $f : K \to P(Q)$ - квазилинейное отображение. Его график Z - выпуклый замкнутый конус.

Обозначим через $Z' = \Big\{(\varphi,\psi) \in K^*\times Q^* \mid \forall\ (x,y)\in Z \quad \varphi(x)\geq \psi(y)\Big\}$ конус, который будем называть **двойственным** по отношению к конусу Z. Этот конус также выпуклый и замкнутый.

Определим отображение $f' : K^* \to P(Q^*)$, двойственное по отношению к отображению f, с графиком Z'. Для $\varphi\in K^*$:

$$f'(\varphi) = \Big\{\psi\in Q^* \mid \forall\ x\in K \quad \varphi(x) \geq \max_{y\in f(x)} \psi(y)\Big\}.$$

Теорема двойственности. Пусть $f\in F(K,Q)$, тогда $f'(K^*) = Q^*$ и $\forall\ \psi\in Q^* \quad \forall\ x\in K$ выполняется равенство

$$\max_{y\in f(x)} \psi(y) = \inf_{\varphi\in (f')^{-1}(\psi)} \varphi(x).$$

Доказательство. Пусть $\psi \in Q^*$. По определению отображения f' выполняется равенство $(f')^{-1}(\psi) = U_{p_\psi}$, где p_ψ определяется формулой (5). Из теоремы Фенхеля следует непустота множества $(f')^{-1}(\psi) = U_{p_\psi}$. Тогда $\psi \in f'(K^*)$ и $f'(K^*) = Q^*$. По теореме Фенхеля далее следует: $\max\limits_{y \in f(x)} \psi(y) = p_\psi(x) = \inf\limits_{\varphi \in U_{p_\psi}} \varphi(x) = \inf\limits_{\varphi \in (f')^{-1}(\psi)} \varphi(x).\diamondsuit$

Утверждение о двойственном отображении. Пусть $f \in F(K, Q)$. Тогда $f' \in F(K^*, Q^*)$ и f' нормально (относительно конуса Q^*).

Доказательство. Супераддитивность и положительная однородность f' вытекают из определения.

Проверим замкнутость отображения f'. Пусть имеется последовательность $(\varphi_k, \psi_k)_{k=1}^{\infty}$ со свойствами: $(\varphi_k, \psi_k) \to (\varphi, \psi)$ при $k \to \infty$ и $\psi_k \in f'(\varphi_k)$ при всех k. Тогда из определения f' следует, что $\psi \in f'(\varphi), \quad \varphi \in K^*$.

Проверим гейловость отображения f'. Если $\psi \in f'(0)$, то $\forall y \in f(K)$ выполняется равенство $\psi(y) = 0$. Из невырожденности $f : f(K) \cap \overset{o}{Q} \neq \emptyset$ следует, что $\psi(y) = 0$ для некоторого $y \in \overset{o}{Q}$. Так как $\psi \in Q^*$, то для некоторой окрестности $V(y) \subset \overset{o}{Q}$ выполняется $\forall\ z \in V(y) \quad \psi(z) = 0$. В этом случае линейный функционал $\psi \equiv 0$ в пространстве Y.

Из теоремы двойственности следует, что $f'(K^*) \cap \overset{o}{Q^*} = \overset{o}{Q^*}$ и $\overset{o}{Q^*} \neq \emptyset$, так как конус Q^* воспроизводящий и, следовательно, телесный. Квазилинейность f' доказана.

Остается проверить нормальность отображения f'. Выбираем любое $\varphi \in K^*$, докажем, что $f'(\varphi)$ - нормальное множество относительно конуса Q^*. Пусть $\psi \in f'(\varphi)$ и $0 \leq \chi \leq \psi$. Согласно утверждению о нормальных множествах достаточно доказать, что $\chi \in f'(\varphi)$. Из условия $\psi \in f'(\varphi)$ следует, что $\forall\ x \in K \quad \varphi(x) \geq \max\limits_{y \in f(x)} \psi(y)$. Отсюда вытекает, что $\forall\ x \in K \quad \varphi(x) \geq \max\limits_{y \in f(x)} \chi(y)$, откуда следует $\chi \in f'(\varphi)$. $\diamondsuit$

В следующей теореме используются три конечномерных нормированных пространства X, Y_1, Y_2 и три конуса K, Q_1, Q_2 в них соответственно.

Теорема о суперпозиции двойственных отображений. Пусть $f_1 \in F(K, Q_1)$, $f_2 \in F(Q_1, Q_2)$. Тогда выполняются свойства $f_2 \circ f_1 \in F(K, Q_2)$ и $(f_2 \circ f_1)' = f_2' \circ f_1'$.

Доказательство. Супераддитивность, положительная однородность, замкнутость и гейловость многозначного отображения $f_2 \circ f_1$ доказываются аналогично приведенным ранее доказательствам. Докажем невырожденность отображения $f_2 \circ f_1$. Отображение f_2 невырождено $f_2(Q_1) \cap \overset{o}{Q}_2 \neq \emptyset$. Это означает, что $\exists\ y_2 \in Q_1 \quad f_2(y_2) \cap \overset{o}{Q}_2 \neq \emptyset$. Покажем, что для любого $y_1 \in \overset{o}{Q}_1$ выполняется $f_2(y_1) \cap \overset{o}{Q}_2 \neq \emptyset$. Возьмём $y(\alpha) = \frac{y_1 - \alpha y_2}{1-\alpha}$. При малом α выполняется $y(\alpha) \in Q_1$. Тогда $f_2(y_1) = f_2\big(\alpha y_2 + (1-\alpha) y(\alpha)\big) \supset \alpha f_2(y_2) + (1-\alpha) f_2(y(\alpha))$. Так как $\alpha f_2(y_2) \cap \overset{o}{Q}_2 \neq \emptyset$ (из-за того, что Q_2 - конус), то $f_2(y_1) \cap \overset{o}{Q}_2 \neq \emptyset$. Здесь используется выпуклость конуса Q_2.
Так как $f_1(K) \cap \overset{o}{Q}_1 \neq \emptyset$, то $\exists\ y_0 \in f_1(K)$, $y_0 \in \overset{o}{Q}_1$. Из предыдущего следует, что $f_2(y_0) \cap \overset{o}{Q}_2 \neq \emptyset$, а отсюда получаем невырожденность $f_2 \circ f_1 : (f_2 \circ f_1)(K) \cap \overset{o}{Q}_2 \neq \emptyset$.
Далее докажем свойство суперпозиции двойственных отображений. Отображение $f_2' \circ f_1'$ определено корректно.
Пусть $\chi \in Q_2^*$, построим

$$p_\chi(x) = \max_{z \in (f_2 \circ f_1)(x)} \chi(z).$$

Из утверждения о многозначных отображениях и функционалах следует, что p_χ - суперлинейный функционал.
Далее используем теорему двойственности

$$p_\chi(x) = \max_{z \in (f_2 \circ f_1)(x)} \chi(z) = \max_{y \in f_1(x)} \max_{z \in f_2(y)} \chi(z) =$$

$$= \max_{y \in f_1(x)} \inf_{\psi \in (f_2')^{-1}(\chi)} \psi(y) = \inf_{\psi \in (f_2')^{-1}(\chi)} \max_{y \in f_1(x)} \psi(y)$$

(последнее равенство следует из теоремы о минимаксе).
Множество $(f_2')^{-1}(\chi)$ является подмножеством конуса Q_1^*. По теореме

двойственности выполняется равенство

$$\max_{y\in f_1(x)} \psi(y) = \inf_{\varphi\in(f_1')^{-1}(\psi)} \varphi(x). \tag{6}$$

Отсюда следует

$$p_\chi(x) = \inf_{\psi(f_2')^{-1}(\chi)} \inf_{\varphi\in(f_1')^{-1}(\psi)} \varphi(x) =$$
$$= \inf_{\varphi\in(f_1')^{-1}\circ(f_2')^{-1}(\chi)} \varphi(x) = \inf_{\varphi\in(f_2'\circ f_1')^{-1}(\chi)} \varphi(x).$$

Множество $(f_2' \circ f_1')^{-1}(\chi)$ является K-опорным. Из определения следует, что оно K^*-устойчиво $(f_2' \circ f_1')^{-1}(\chi) + K^* \subset (f_2' \circ f_1')^{-1}(\chi)$ и выпукло. Его замкнутость вытекает из замкнутости отображений f_1' и f_2'. Из формулы (6) получаем:

$$\inf_{\varphi\in(f_2'\circ f_1')^{-1}(\chi)} \varphi(x) > -\infty.$$

Следовательно, $(f_2' \circ f_1')^{-1}(\chi)$ - K-опорное. Из связи опорных функционалов и опорных множеств следует $U_{p_\chi} = (f_2' \circ f_1')^{-1}(\chi)$. С другой стороны, из определения двойственного отображения следует: $U_{p_\chi} = \left((f_2 \circ f_1)'\right)^{-1}(\chi)$. Отсюда:

$$(f_2' \circ f_1')^{-1}(\chi) = \left((f_2 \circ f_1)'\right)^{-1}(\chi),$$

то есть $(f_2' \circ f_1')^{-1} = \left((f_2 \circ f_1)'\right)^{-1}$. Отсюда следует равенство $f_2' \circ f_1' = (f_2 \circ f_1)'$. Теорема доказана. $\diamondsuit$

Теорема о втором двойственном отображении. Пусть $f \in F(K, Q)$. Тогда $f'' = nf$.

Доказательство. Из теоремы двойственности и теоремы Фенхеля следует, что $\forall\ \psi \in Q^* \quad (f')^{-1}(\psi) \neq \emptyset$. Для $x \in K$ определим функционал на Q^*:

$$q_x(\psi) = \inf_{\varphi\in(f')^{-1}(\psi)} \varphi(x).$$

По теореме двойственности

$$q_x(\psi) = \max_{y\in f(x)} \psi(y). \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что q_x - сублинейный монотонный функционал на Q^*. Обращаем внимание на разницу в формулах (5) и (7). В формуле (5) в качестве аргумента выступают элементы конуса K, а в формуле (7) - элементы конуса Q^*.

Пусть $V_{q_x}^+ = V_{q_x} \cap Q$. Напомним, что в данном случае $V_{q_x}^+ = \Big\{ y \in Q \mid \forall\ \psi \in Q^* \quad \psi(y) \leq q_x(\psi) \Big\}$.

Предположим, что $y \in f''(x)$. Тогда $\forall\ \psi \in Q^*\ \forall\ \varphi \in (f')^{-1}(\psi)$ выполняется $\varphi(x) \geq \psi(y)$. Отсюда следует, что $q_x(\psi) = \inf\limits_{\varphi \in (f')^{-1}(\psi)} \varphi(x) \geq \psi(y)$. Тогда $y \in V_{q_x}^+$. Отсюда следует, что $f''(x) \subset V_{q_x}^+$.

Пусть, наоборот, $y \in V_{q_x}^+$. Тогда $\forall\ \psi \in Q^* \quad \psi(y) \leq q_x(\psi),\ y \in Q$. Отсюда следует, что $\forall\ \psi \in Q^*, \forall\ \varphi \in K^*$ из условия $\psi \in f'(\varphi)$ получается $\psi(y) \leq \varphi(x)$. Это означает, что $y \in f''(x)$ и $V_{q_x}^+ \subset f''(x)$.

Таким образом, доказано, что $V_{q_x}^+ = f''(x)$.

Теперь докажем, что множество $V_{q_x}^+$ нормально. Пусть $y \in V_{q_x}^+,\ 0 \leq z \leq_Q y$. Тогда $z - 0 \in Q$, т.е. $z \in Q$. Так как $y \in V_{q_x}^+$, то $\forall\ \psi \in Q^*$ выполняется неравенство $\psi(y) \leq q_x(\psi)$. Отсюда следует, что $0 \leq \psi(z) \leq \psi(y) \leq q_x(\psi)$. Это означает, что $z \in V_{q_x}^+$. Отсюда следует, что множество $V_{q_x}^+$ нормально относительно конуса Q. Равное ему множество $f''(x)$ тоже является нормальным.

Теперь докажем, что $f'' = nf$. Множество $nf(x) - Q$ является Q^* - субопорным. При этом для $\psi \in Q^*$ выполняется $\sup\limits_{y \in nf(x)-Q} \psi(y) = \sup\limits_{y \in V_{q_x}^+} \psi(y)$. Это следует из того факта, что $\sup\limits_{y \in nf(x)-Q} \psi(y) = \max\limits_{y \in nf(x)} \psi(y) = \max\limits_{y \in f(x)} \psi(y)$. Последнее равенство следует из цепочки преобразований $\max\limits_{y \in nf(x)} \psi(y) \leq \max\limits_{y \in (f(x)-Q)\cap Q} \psi(y) \leq \max\limits_{y \in (f(x)-Q)} \psi(y) = \max\limits_{y \in f(x)} \psi(y) \leq \max\limits_{y \in nf(x)} \psi(y)$.

Отсюда по теореме об отображении h следует, что $V_{q_x} = nf(x) - Q$ и $V_{q_x}^+ = (nf(x) - Q) \cap Q = nf(x)$.

Теорема доказана.$\diamondsuit$

Следствие. 1. Для $f \in F(K,Q)$ равенство $f = f''$ выполняется тогда и только тогда, когда f нормально. 2. Если $f \in F(K, Q)$, то $nf \in F(K, Q)$.

1.6 Упражнения

Решить следующие задачи, примеры или доказать сформулированные факты. Соотвествующие обозначения и понятия приведены в тексте раздела.

1. Привести примеры выступающих и воспроизводящих конусов в пространствах $X = R^2$ и $X = R^3$.

2. Телесный конус является воспроизводящим.

3. Определить условия на конус K, при которых порядок $\leq_K$ станет линейным.

4. Конечномерное нормированное пространство является полным.

5. Для выступающего конуса K конус K^* является воспроизводящим.

6. Если K - выпуклый конус, то $\forall x, y \in K$ выполняется $x + y \in K$.

7. Если линейный функционал $\varphi \in X^*$ равен нулю на некотором телесном подмножестве пространства X, то $\varphi \equiv 0$ на всём пространстве X.

8. Если K - выпуклый замкнутый конус, то K^* - также выпуклый замкнутый конус.

9. Если K - выступающий конус, то K^* - воспроизводящий конус.

10. Если K - воспроизводящий конус, то K^* - выступающий конус.

11. Функционал p_U является супераддитивным и положительно однородным.

12. Множество Z_p в доказательстве теоремы Фенхеля является выпуклым замкнутым конусом.

13. Если $p \in \Phi(K)$, то множество $U_p - K$-опорное.

14. Если $U \subset X^*, U - K$-опорное, то функционал p_U суперлинеен.

15. Если функционал q сублинеен, то $-q$ суперлинеен.

16. Отображение $g : P\Phi(K) \to \Phi(K)$ является взаимно однозначным отображением на все множество $\Phi(K)$.

17. Если $\quad q \in \Psi(K)$, то $V_q \neq \emptyset$ и $\forall\ x \in K \qquad q(x) = \sup\limits_{\varphi \in V_q} \varphi(x)$.

18. Отображение $h : Q\Psi(K) \to \Psi(K)$ является взаимно однозначным отображением на все множество $\Psi(K)$.

19. Множество V_q^+ непусто тогда и только тогда, когда q принимает на K неотрицательные значения.

20. В доказательстве теоремы о монотонных сублинейных функционалах множество Z_q является выпуклым замкнутым конусом.

21. В доказательстве теоремы о монотонных сублинейных функционалах множество Z_0 является выпуклым замкнутым, но не конусом.

22. Квазилинейное отображение $f : K \to P(Q)$ является ограниченным.

23. Функционал p_ψ (5) положительно однородный.

24. Построить K^* для $K = \{(x_1, x_2) \in R_+^2 \mid x_1 = x_2\}$.

25. Множество Z' является выпуклым замкнутым конусом.

26. Функционал q_x (7) является сублинейным и монотонным.

27. В теореме о втором двойственном отображении множество $nf(x) - Q$ является Q^* - субопорным.

II Модели Неймана-Гейла

Через X по-прежнему обозначаем конечномерное нормированное пространство.

Модель Неймана-Гейла - это такой выпуклый замкнутый конус $Z \subset R^n_+ \times R^n_+$, что $\forall y \neq 0,\ (0,y) \notin Z,\ Pr_2 Z \cap (\overset{o}{R^n_+}) \neq \emptyset$. Модель Z называется **правильной**, если $Pr_1 Z = R^n_+$. В дальнейшем мы рассматриваем правильные модели Неймана - Гейла.

Для пары $(x,y) \in Z$ вектор x называется вектором затрат, а y - вектором выпуска. Подчеркивая этот содержательный смысл векторов, иногда пару $(x,y) \in Z$ будем называть **процессом**.

По конусу Z можно построить многозначное отображение $f : K \to P(R^n_+)$, где $K = Pr_1 Z,\ f(x) = \{y \mid (x,y) \in Z\}$. Отображение f называется **производственным отображением** модели Неймана-Гейла.

Утверждение о модели Неймана - Гейла. Конус Z - модель Неймана-Гейла тогда и только тогда, когда соответствующее отображение f является квазилинейным многозначным отображением.

Доказательство.

Необходимость. Пусть конус Z - модель Неймана-Гейла. Определим множество $K = Pr_1 Z$ и отображение f: $\forall x \in K \quad f(x) = \{y \in R^n_+ \mid (x,y) \in Z\}$.

Из выпуклости конуса Z получаем, что для: $(x,y) \in Z,\ (u,v) \in Z$ справедливо $(x+u, y+v) \in Z$. Это означает супераддитивность f.

Положительная однородность f следует из определения конуса Z. Остальные свойства f прямо указаны в определении модели Неймана-Гейла.

Достаточность. Пусть f - квазилинейное многозначное отображение. Обозначим через Z график для f. Тогда Z является выпуклым замкнутым конусом. Остальные свойства Z прямо указаны в определении квазилинейного отображения f.$\diamondsuit$

Состоянием равновесия модели Неймана-Гейла называется набор элементов $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{\varphi})$ с числом $\alpha > 0$, парой $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ и функционалом $\bar{\varphi} \in (R^n_+)^*$, для которых выполняются условия:
1) $\alpha\bar{x} \leq \bar{y}$ (неравенство понимается в смысле конуса R^n_+);
2) $\forall\ (x, y) \in Z$ выполняется неравенство $\bar{\varphi}(y) \leq \alpha\bar{\varphi}(x)$ и $\bar{\varphi}(\bar{y}) > 0$.
Число $\alpha = \alpha(\sigma)$ называется **темпом роста** модели Неймана-Гейла Z (или производственного отображения f).

Утверждение о свойствах пар из модели Z. Для любых $(x, y) \in Z$ выполняются неравенства $\bar{\varphi}(y) \leq \alpha\bar{\varphi}(x)$ и неравенство $\bar{\varphi}(\bar{y}) > 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\alpha}\bar{\varphi} \in f'(\bar{\varphi})$.

Доказательство. Вспомним определение $f'(\bar{\varphi})$. А именно: $f'(\bar{\varphi}) = \Big\{\psi \in (R^n_+)^* \mid \forall x \in K \quad \bar{\varphi}(x) \geq \max\limits_{y \in f(x)} \psi(y)\Big\}$. Тогда верна следующая цепочка эквивалентных преобразований: условие $\forall (x, y) \in Z \quad \bar{\varphi}(x) \geq \frac{1}{\alpha}\bar{\varphi}(y)$ эквивалентно неравенству $\bar{\varphi}(x) \geq \max\limits_{y \in f(x)} \frac{1}{\alpha}\bar{\varphi}(y)$, а последнее эквивалентно условию $\frac{1}{\alpha}\bar{\varphi} \in f'(\bar{\varphi})$. $\diamondsuit$

2.1 Темпы роста

Если Z модель Неймана - Гейла, то Z' также модель Неймана - Гейла (с заменой R^n на $(R^n)^*$). Тогда и для Z' можно говорить о темпах роста. Модель Z' будем называть **двойственной** по отношению к модели Z.

Утверждение о темпах роста двойственных отображений. Пусть Z - модель Неймана-Гейла, f - производственное отображение в этой модели, $f \in F(K, R^n_+)$. Тогда число $\alpha > 0$ является темпом роста модели Неймана-Гейла в том и только в том случае, когда число $\frac{1}{\alpha}$ является темпом роста отображения f'.

Доказательство.
Необходимость. Пусть α - темп роста отображения f и $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{\varphi})$ - соответствующее равновесие. Тогда $\alpha\bar{x} \leq \bar{y}$, откуда следует условие $\alpha\bar{x} \in$

$nf(\bar{x}) = f''(\bar{x})$. Из условий равновесия следует, что $\forall\ (x, y) \in Z \quad \bar{\varphi}(y) \leq \alpha\bar{\varphi}(x)$, то есть $\bar{\varphi}(x) \geq \frac{1}{\alpha}\bar{\varphi}(y)$. Это влечёт за собой $\frac{1}{\alpha}\bar{\varphi} \in f'(\bar{\varphi})$ и $\bar{\varphi}(\bar{x}) > 0$. Из $\alpha\bar{x} \in f''(\bar{x})$ следует $\forall\ \varphi \in K^*,\ \forall\psi \in f'(\varphi)$ выполняется неравенство $\varphi(\bar{x}) \geq \psi(\alpha\bar{x})$. Это означает, что $\left(\frac{1}{\alpha}, (\bar{\varphi}, \frac{1}{\alpha}\bar{\varphi}), \bar{x}\right)$ - равновесие для отображения f'. Следовательно, $\frac{1}{\alpha}$ - темп роста для отображения f'.

Достаточность. Пусть β - темп роста для отображения f'. Из доказанной необходимости следует, что $\frac{1}{\beta}$ - темп роста для отображения f''. Отсюда следует существование равновесия для отображения $f'' = nf$ вида $(\frac{1}{\beta},\ (\bar{x}, \bar{y}),\ \bar{\varphi})$. Это означает выполнение следующих условий: $\frac{1}{\beta}\bar{x} \leq \bar{y}$, $\forall\, x, y$ при условии $y \in f''(x)$ выполняется неравенство $\frac{1}{\beta}\bar{\varphi}(x) \geq \bar{\varphi}(y)$, а также выполняется неравенство $\bar{\varphi}(\bar{y}) > 0$. Так как $\bar{y} \in f''(\bar{x}) = nf(\bar{x})$, то найдётся $\bar{z} \in f(\bar{x})$ с условием $\bar{y} \leq \bar{z}$. Так как $\bar{z} \in f(\bar{x}) \subset nf(\bar{x}) = f''(\bar{x})$, то выполняется неравенство $\frac{1}{\beta}\bar{\varphi}(\bar{x}) \geq \bar{\varphi}(\bar{z})$. Тогда $(\frac{1}{\beta}, (\bar{x}, \bar{z}), \bar{\varphi})$ - состояние равновесия для f.$\diamondsuit$

Показателем роста процесса $(x, y) \in Z$ называется число $\alpha(x, y) = \sup\{\alpha \mid \alpha x \leq y\}$.

Напомним, что в R^n есть стандартный базис и любой $x \in R^n$ представляется столбцом своих координат $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Введём обозначения $I = \{1, \ldots, n\},\ I_x = \{i \in I \mid x_i > 0\}$. Тогда $\alpha(x, y) = \min\limits_{i \in I} \frac{y_i}{x_i} = \min\limits_{i \in I_x} \frac{y_i}{x_i}$ (условно будем считать, что при $y_i > 0$ выполняется равенство $\frac{y_i}{0} = +\infty$ и $+\infty$ больше любого действительного числа).

Утверждение об отображении α. Отображение $\alpha : (x, y) \longmapsto \alpha(x, y)$ на $Z \backslash \{0\}$ является полунепрерывным сверху и положительно однородным нулевой степени функционалом.

Доказательство. Положительная однородность нулевой степени очевидна. Докажем полунепрерывность сверху. Пусть $(x_k, y_k) \in Z,\ (x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$ (считаем $x_0 \neq 0$ без ограничений общности). Пусть $\tilde{\alpha}$ - предельная точка последовательности $\alpha(x_k, y_k)$, $\tilde{\alpha} = \lim_{i\to\infty} \alpha(x_{k_i}, y_{k_i})$. Из определений следует, что $\alpha(x_{k_i}, y_{k_i})x_{k_i} \le y_{k_i}$. Тогда $\tilde{\alpha} < \infty$ (иначе $x_0 = 0$), в пределе $\tilde{\alpha}x_0 \le y_0$, откуда $\tilde{\alpha} \le \alpha(x_0, y_0)$. Это означает, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha(x_n, y_n) \le \alpha(x_0, y_0)$.$\diamondsuit$

Число $\alpha(Z) = \max_{(x,y)\in Z,\ ||(x,y)||=1} \alpha(x,y) = \sup_{(x,y)\in Z,\ (x,y)\neq 0} \alpha(x,y)$ назовем **неймановским показателем роста** модели Z.

Замечание. Неймановский показатель роста $\alpha(Z)$ всегда положителен и конечен.

Доказательство следует из того, что $Pr_2 Z \cap \overset{o}{R^n_+} \neq \emptyset$, а неймановский показатель роста достигается на некотором процессе, и пара $(0, y)$ не принадлежит конусу Z ни при каком $y \neq 0$. $\diamondsuit$

Утверждение о неймановском показателе роста. Пусть Z - модель Неймана-Гейла. Тогда найдется такой функционал $\bar{\varphi} \in (R^n_+)^*$, что $\forall\ (x, y) \in Z$ выполняется неравенство $\bar{\varphi}(y) \le \alpha(Z)\bar{\varphi}(x)$.

Доказательство. Обозначим $D = \{y - \alpha(Z)x \mid (x, y) \in Z\}$. Это выпуклый замкнутый конус. Из определения $\alpha(Z)$ следует, что $D \cap \overset{o}{R^n_+} = \emptyset$. По теореме отделимости для конуса следует существование такого линейного функционала $\bar{\varphi}$, что $\bar{\varphi} \neq 0$ и $\max_{z\in D} \bar{\varphi}(z) = 0 \le \min_{u\in R^n_+} \bar{\varphi}(u)$. Это означает, что функционал $\bar{\varphi}$ является искомым.$\diamondsuit$

В работе [6] приводится пример, когда в модели Неймана-Гейла вообще нет равновесных состояний. Все дело в том, что для неймановского показателя роста $\alpha(Z)$ можно найти набор $(\alpha(Z), (\bar{x}, \bar{y}), \bar{\varphi})$ с выполнением всех условий для состояния равновесия, кроме $\bar{\varphi}(\bar{y}) > 0$. Поэтому даже для неймановского показателя роста не всегда справедливо то, что он является темпом роста.

Пару (x, y) с $\alpha(x, y) = \alpha(Z)$ назовем **неймановским процессом**. Соответствующее неймановскому показателю роста состояние равновесия (если оно существует) назовем **неймановским состоянием равновесия**.

Неймановским темпом роста назовём неймановский показатель роста, являющийся темпом роста.

Утверждение о множестве C_α. Пусть Z - модель Неймана-Гейла и число α такое, что $C_\alpha = \{(x,y) \in Z \mid \alpha x \le y\} \ne \emptyset$, тогда найдется такая пара $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in C_\alpha$, что $\forall\ (x,y) \in C_\alpha$ выполняются включения $I_{\tilde{x}} \supset I_x,\ I_{\tilde{y}} \supset I_y$.

Доказательство. В множестве C_α существует конечное число пар (x_i, y_i) $(i = \overline{1,m})$, для которых множества $I_{x_i} \times I_{y_i}$ попарно различны. Тогда искомая пара есть $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i, y_i).\diamondsuit$

Согласно утверждению о множестве C_α среди неймановских процессов модели Z найдется такой процесс $(\hat{x}, \hat{y})$, что его множества $I_{\hat{x}}, I_{\hat{y}}$ включают в качестве подмножеств такие же множества любого другого неймановского процесса. Тогда пару $(\hat{x}, \hat{y})$ будем называть **полным неймановским процессом**. Множество $I_{\hat{y}}$ в этом случае обозначим через $I(Z)$.

Рассмотрим следующую процедуру построения конусов. Пусть Z - модель Неймана-Гейла. Положим $Z_1 = Z,\ \Gamma_1 = R^n$. Если $I_1 = I(Z_1) = I$, то останавливаемся. Если же $I_1 \ne I$, то рассматриваем подпространство Γ_2 пространства R^n на ортах с номерами $I \setminus I_1$. Обозначаем $Z_2 = Pr_{\Gamma_2 \times \Gamma_2} Z_1$. Конус Z_2 является моделью Неймана-Гейла в пространстве $\Gamma_2 \times \Gamma_2$. Далее мы рассматриваем ее в этом пространстве. Если $I_2 = I(Z_2) = I \setminus I_1$, то останавливаемся, иначе обозначаем через Γ_3 подпространство пространства R^n на ортах с номерами $I \setminus (I_1 \cup I_2)$ и $Z_3 = Pr_{\Gamma_3 \times \Gamma_3} Z_2$. Конус Z_3 является моделью Неймана-Гейла в пространстве $\Gamma_3 \times \Gamma_3$. И так далее. Этот процесс заканчивается на некотором шаге m. Действительно, из определения I_j вытекает, что $I_j \ne \emptyset$ при $\bigcup\limits_{k=1}^{j-1} I_k \ne I$. Отсюда следует конечность описанной процедуры и существование числа $m \le n$.

Получаем конечную последовательность непустых конусов $Z_1 =$

$Z,\ Z_2, \ldots, Z_m$ и множества индексов $I_1 \ldots I_m,\ I_j = I(Z_j),\ I_j \cap I_{j'} = \emptyset$ для $j \neq j'$, при этом $\bigcup\limits_{j=1}^{m} I_j = I$. Из описания конструкции следует, что каждый из конусов Z_j представляет из себя модель Неймана-Гейла в соответствующем пространстве $\Gamma_j \times \Gamma_j$. Через α_j обозначим неймановский показатель роста этой модели Z_j. Непосредственно из способа построения последовательности конусов Z_j вытекает неравенство $\alpha_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$.

Лемма об экстремальных парах модели Z. Для любого $j = 1, \ldots, m$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая пара $(x_j, y_j) \in Z$, что выполняются следующие условия:

1) $\min\limits_{k=1\ldots j} \alpha_k - \min\limits_{i \in I}(y_{ji}/x_{ji}) \leq \varepsilon$;

2) для $j < m$ для всех $i \in \bigcup\limits_{k=j+1}^{m} I_k$ выполняются равенства $x_{ji} = y_{ji} = 0$ и для всех $i \in \bigcup\limits_{k=1}^{j} I_k$ выполняются неравенства $y_{ji} > 0$. При $j = m$ для всех $i \in I$ выполнено $y_{ji} > 0$.

Доказательство. Зафиксируем число $j < m$. Пусть $(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ - полный неймановский процесс модели Z_j в пространстве $\Gamma_j \times \Gamma_j$. Тогда найдется такая пара $(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ из конуса Z, проекция которой на пространство $\Gamma_j \times \Gamma_j$ совпадает с $(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$. Для пары $(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ справедливы неравенства $\bar{y}_{ji} > 0$ для $i \in I_j$ и $\bar{x}_{ji} = \bar{y}_{ji} = 0$ для $i \in \bigcup\limits_{k=j+1}^{m} I_k$. При этом выполняется условие: $\min\limits_{i \in I_j}(\bar{y}_{ji}/\bar{x}_{ji}) = \alpha_j$.

Теперь будем выбирать искомую пару (x_j, y_j) в виде $(x_j, y_j) = \sum\limits_{k=1}^{j} \beta_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ со специально подобранными $\beta_1, ..., \beta_j$. Пусть $\min\limits_{k=1,\ldots,j} \alpha_k = \alpha_l$. Тогда выберем $\beta_k = 1$ для $k \neq l$ и β_l таким большим, чтобы $\min\limits_{i \in \bigcup_{k=1}^{j} I_k} \frac{y_{ji}}{x_{ji}} \geq \alpha_l - \varepsilon$. Тогда пара (x_j, y_j) обладает требуемыми свойствами.

Случай $j = m$ рассматривается аналогично с тем отличием, что некоторые из используемых множеств оказываются пустыми. $\diamondsuit$

Через $\Lambda \subset \{1, 2, ..., m\}$ обозначим множество таких индексов j, что неймановский показатель роста $\alpha_j = \alpha(Z_j)$ модели Z_j является темпом роста модели Z_j и $\forall\ k < j \quad \alpha_k > \alpha_j$. Множество Λ назовем **множеством темпов роста**.

Теорема о темпе роста. Число $\alpha > 0$ является темпом роста модели Неймана-Гейла Z тогда и только тогда, когда оно является неймановским темпом роста модели Z_j при некотором $j \in \Lambda$.

Доказательство.

Начнем с достаточности. Пусть $j \in \Lambda$. Для неймановского темпа роста α_j модели Z_j существует неймановское состояние равновесия в соответствующем пространстве $\Gamma_j \times \Gamma_j$. Обозначим это состояние равновесия $(\alpha_j, (\bar{x_j}, \bar{y_j}), \bar{\varphi_j})$. Через $\bar{\varphi}$ обозначим линейный функционал на R^n, совпадающий с $\bar{\varphi_j}$ на пространстве Γ_j и равный нулю на ортогональном дополнении Γ_j. Тогда $\forall\ (x, y) \in Z\ \bar{\varphi}(y) \leq \alpha_j \bar{\varphi}(x)$. Существует такая пара $(\hat{x}, \hat{y}) \in Z$, что $Pr\ _{\Gamma_j \times \Gamma_j}(\hat{x}, \hat{y}) = (\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ и $\bar{\varphi}(\hat{y}) > 0$. Из определения проекции следует $\min\limits_{i \in \bigcup\limits_{k=j}^{m} I_k} (\hat{y}_i / \hat{x}_i) = \min\limits_{i \in \bigcup\limits_{k=j}^{m} I_k} (\bar{y}_{ji} / \bar{x}_{ji})$.

Из леммы об экстремальных парах модели Z следует существование такой пары $(x, y) \in Z$, что $y_i > 0$ для $i \in \bigcup\limits_{k=1}^{j-1} I_k$ и $y_i = x_i = 0$ для $i \in \bigcup\limits_{k=j}^{m} I_k$ и $\min\limits_{i \in I}(y_i / x_i) > \alpha_j$ (здесь лемма применена для индекса $j - 1$ с учетом того, что $\alpha_{j-1} > \alpha_j$). Рассмотрим $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) = (\hat{x}, \hat{y}) + \beta(x, y)$, где β настолько большое, что $\min\limits_{i \in I}(\tilde{y}_{ji} / \tilde{x}_{ji}) \geq \alpha_j$. Тогда $\tilde{y}_j \geq \alpha_j \tilde{x}_j,\ \bar{\varphi}(\tilde{y}_j) > 0$. Тогда $(\alpha_j, (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j), \bar{\varphi})$ - равновесие, α_j - темп роста для Z.

Необходимость. Покажем, что каждый темп роста совпадает с одним из $\alpha_j,\ j \in \Lambda$. Пусть $(\bar{\alpha}, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{\varphi})$ - состояние равновесия для Z. Положим $\bar{I} = \left\{ i \in I \mid \bar{y}_i / \bar{x}_i = \bar{\alpha},\ \bar{\varphi}_i > 0 \right\}$ (здесь имеется в виду стандартный базис в $(R^n)^*$). В состоянии равновесия $\bar{\alpha}\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{y})$ и $\bar{\varphi}(\bar{y}) > 0$, отсюда $\bar{I} \neq \emptyset$. Обозначим через j первый из таких индексов, что $I_j \cap \bar{I} \neq \emptyset$, тогда

$\bar{I} \subset \bigcup\limits_{k=j}^{m} I_k$. Если $j > 1$, то $\bar{\varphi}_i = 0$ для $i \in \bigcup\limits_{k=1}^{j-1} I_k$. Из соотношения

$$\alpha_j = \sup_{(x,y)\in Z,\ (x,y)\neq 0} \ \min_{i\in \bigcup\limits_{k=j}^{m} I_k} \frac{y_i}{x_i}$$

следует $\alpha_j \geq \bar{\alpha}$. Если $\alpha_j > \bar{\alpha}$, то существует такая пара $(x, y) \in Z$, что $\forall\ i \in \bigcup\limits_{k=j}^{m} I_k \quad y_i > \bar{\alpha} x_i$. Тогда $\bar{\varphi}(y) > \bar{\alpha}\bar{\varphi}(x)$, что невозможно. Отсюда $\bar{\alpha} = \alpha_j$.

Следствие. Правильная модель Неймана - Гейла может иметь лишь конечное число темпов роста.

2.2 Теорема о магистрали в слабой форме

Траекторией правильной модели Неймана-Гейла Z называется последовательность $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ с $(x_t, x_{t+1}) \in Z$ (то есть $x_{t+1} \in f(x_t)$). Содержательно это означает, что в момент времени t затраты x_t порождают продукцию x_{t+1}, которая полностью является затратами следующего момента времени $t + 1$. Если в x_t учесть все экономические процессы "вокруг"моделируемого объекта, то подобные траектории описывают обширный класс экономических явлений.

Конечная траектория $(x_t)_{t=0}^{T}$ называется **оптимальной**, если существует такой линейный функционал $\varphi \in (R^n_+)^*$, что

$$\varphi(x_T) = \max_{y\in f^T(x_0)} \varphi(y),$$

где f^t - суперпозиция отображения f с собой t раз.

Пусть α - темп роста модели. Положим

$$\Pi_\alpha = \left\{\varphi \in (R^n_+)^* | \varphi \in \alpha f'(\varphi),\ \varphi \neq 0\right\}.$$

Из определения равновесия и свойств двойственного отображения f' следует, что $\Pi_\alpha \neq \emptyset, \Pi_\alpha \cup \{0\}$ - выпуклый замкнутый конус.

Рассмотрим стандартный базис $(R^n)^*$. Пусть $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{\varphi})$ - равновесие для темпа роста α. Тогда из $\alpha\bar{x}_i < \bar{y}_i$ следует $\bar{\varphi}_i = 0$. Множество ненулевых координат $\bar{\varphi}$ есть подмножество множества $J_\alpha = \{i \mid \alpha\bar{x}_i = \bar{y}_i\}$. Так как любой $\varphi \in \Pi_\alpha$ должен выполнять неравенство $\alpha\varphi(\bar{x}) \geq \varphi(\bar{y})$, то множество индексов его ненулевых координат также включено в J_α.

Утверждение о траекториях модели Z. Пусть $\varphi \in \Pi_\alpha$, тогда последовательность $(\varphi, \alpha^{-1}\varphi, ..., \alpha^{-t}\varphi, ...)$ является траекторией двойственной модели Z'.

Доказательство непосредственно следует из определений.$\diamondsuit$

Траектория $(x_t)_{t=1}^{\infty}$ модели Z имеет **средний темп роста** α, если $(x_t)_{t=1}^{\infty}$ согласована с траекторией $(\varphi, \alpha^{-1}\varphi, \ldots, \alpha^{-t}\varphi, \ldots)$ при некотором $\varphi \in r(\Pi_\alpha)$, то есть, если $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha^{-t}\varphi(x_t) > 0$.

Заметим, что из $\varphi \in \Pi_\alpha$ следует $\alpha^{-t}\varphi(x_t) \geq \alpha^{-(t+1)}\varphi(x_{t+1})$. Так как для любого t справедливо $\alpha^{-t}\varphi(x_t) \geq 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha^{-t}\varphi(x_t)$ всегда существует.

Изучим асимптотику тракторий, имеющих средний темп роста α.
Пусть α - темп роста модели Z. Обозначим для $\varphi \in \Pi_\alpha$ через

$$H_\varphi = \{(x, y) \in R^n \times R^n \mid \alpha\varphi(x) = \varphi(y)\}.$$

Если $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{\varphi})$ состояние равновесия, то луч $(\lambda(\bar{x}, \bar{y}))_{\lambda\geq 0} \subset H_\varphi \ \forall \ \varphi \in \Pi_\alpha$.
Множество $N_\alpha = Z \cap \left(\bigcap\limits_{\varphi\in\Pi_\alpha} H_\varphi \right)$ называется **неймановской** гранью конуса Z.

Утверждение об условиях оптимальности траекторий. Если $\varphi \in r(\Pi_\alpha)$, то $N_\alpha = Z \cap H_\varphi$.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in Z \cap H_\varphi$ и $\varphi' \in \Pi_\alpha$. Пусть $\varphi \in r(\Pi_\alpha)$. Тогда $\varphi - \delta\varphi' \in \Pi_\alpha$ ($\delta > 0$ и δ мало). Тогда $\varphi(y) = \alpha\varphi(x)$, $(\varphi - \delta\varphi')(y) \leq \alpha(\varphi - \delta\varphi')(x)$. Отсюда следует неравенство $\varphi'(y) \geq \alpha\varphi'(x)$. В нашем случае $\varphi' \in \alpha f'(\varphi')$, откуда следует неравенство $\varphi'(y) \leq \alpha\varphi'(x)$. В совокупности с предыдущим это означает, что $\varphi'(y) = \alpha\varphi'(x)$, то есть $(x, y) \in H_{\varphi'}$.

Из этого рассуждения следует включение

$$N_\alpha = Z \cap \Big(\bigcap_{\varphi' \in \Pi_\alpha} H_{\varphi'} \Big) \supset Z \cap H_\varphi.$$

Обратное включение очевидно.$\diamondsuit$

Пусть B, C - два компактных подмножества пространства X. Расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x, y \in X$ можно определить как $\rho(x, y) = ||x - y||$. Расстояние от точки $x \in X$ до компактного множества C определяется как $\rho(x, C) = \min\limits_{y \in C} \rho(x, y)$. Наконец, **расстояние между компактными множествами** B, C определяется формулой

$$\rho(B, C) = \max\Big\{ \max_{x \in B} \rho(x, C),\ \max_{y \in C} \rho(B, y) \Big\}. \tag{8}$$

Через $CP(D)$ обозначим **множество всех компактных подмножеств замкнутого множества D в пространстве** X. Оно является полным метрическим пространством в метрике (8) [3, 8]. Метрика (8) называется **метрикой Хаусдорфа**.

Лемма Мак-Кензи. Пусть α - темп роста модели Z. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in r(\Pi_\alpha)$ существует такое $\delta > 0$, что $\forall\ (x, y) \in Z$ с условием $\rho\Big(\frac{(x,y)}{\|x\|}, N_\alpha\Big) \geq \varepsilon$ выполняется неравенство $\varphi(y) < (1 - \delta)\alpha\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть лемма неверна. Тогда $\forall\ k \in N$ найдется такая пара $(x_k, y_k) \in Z$, что $\|x_k\| = 1$, $\rho((x_k, y_k), N_\alpha) \geq \varepsilon$, $\varphi(y_k) \geq \frac{k-1}{k}\alpha\varphi(x_k)$ (выбираем $\delta_k = \frac{1}{k}$).

Переходя, возможно, к подпоследовательности, предположим, что $(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$ при $k \to \infty$ (это можно предполагать на основе компактности множества, которому принадлежат члены последовательности (x_k, y_k)). Этот предел $(x_0, y_0) \in Z$ удовлетворяет условиям $||x_0|| = 1$, $\rho((x_0, y_0), N_\alpha) \geq \varepsilon$, в то же время $\varphi(y_0) = \alpha\varphi(x_0)$, то есть $(x_0, y_0) \in N_\alpha$.$\diamondsuit$

Теорема о магистрали в слабой форме. Пусть α - темп роста модели Z, точка $x_0 > 0$, функционал $\psi \geq 0$ таковы, что выполнены следующие условия:

а) из точки x_0 исходит траектория $(\bar{x}_t)$ со средним темпом α;

б) существуют положительные числа k_1, k_2 и такой функционал $\varphi \in ri(\Pi_\alpha)$, что $k_1\varphi \leq \psi \leq k_2\varphi$.

Пусть задано положительное число ε.

Тогда для любой конечной траектории $(x_t)_{t=0}^T$, исходящей из точки x_0 и оптимальной в смысле ψ, число процессов (x_t, x_{t+1}), для которых $\rho\Big(\frac{(x_t,\ x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha\Big) \geq \varepsilon$, не превосходит некоторого числа β, не зависящего от T.

Доказательство. Пусть γ - число таких процессов (x_t, x_{t+1}), что $\rho\Big(\frac{(x_t,\ x_{t+1})}{||x_t||}, N_\alpha\Big) \geq \varepsilon$. По числу $\varepsilon > 0$ согласно лемме Мак-Кензи найдём такое число $\delta > 0$, что (условно считаем $\varphi(x_{t+1})/\varphi(x_t) = \alpha$ при $\varphi(x_t) = \varphi(x_{t+1}) = 0$):

$$\varphi(x_T) = \frac{\varphi(x_T)}{\varphi(x_0)} \cdot \varphi(x_0) = \varphi(x_0)\frac{\varphi(x_T)}{\varphi(x_{T-1})} \cdot\ \cdots\ \cdot \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_0)} \leq \varphi(x_0)\alpha^T(1-\delta)^\gamma,$$

откуда следует

$$\varphi(x_T)\alpha^{-T} \leq \varphi(x_0)(1-\delta)^\gamma.$$

Положим $c = \lim\limits_{t\to\infty} \alpha^{-t}\varphi(\bar{x}_t)$ (c>0 по условию). Из условия (б) теоремы и оптимальности $(\bar{x}_t)$ следует

$$\varphi(x_T)\alpha^{-T} \geq \frac{1}{k_2}\psi(x_T)\alpha^{-T} \geq \frac{1}{k_2}\psi(\bar{x}_T)\alpha^{-T} \geq \frac{k_1}{k_2}\varphi(\bar{x}_T)\alpha^{-T} \geq \frac{k_1}{k_2}c.$$

Отсюда: $(1-\delta)^\gamma \geq \frac{k_1}{k_2}\ \frac{c}{\varphi(x_0)}$. Последнее неравенство приводит к оценке $\gamma \leq \ln\Big(\frac{k_1}{k_2} \cdot \cdot \frac{c}{\varphi(x_0)}\Big)\Big/ \ln(1-\delta) = \beta$. $\diamondsuit$

2.3 Теорема о магистрали в сильной форме

Пусть A - нормальное (в смысле R^n_+) телесное подмножество конуса R^n_+. В R^n вводим норму

$$||x||_A = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda S_A\}.$$

При этом $S_A = A - A$. Тогда S_A - единичный шар в этой норме. Из нормальности A следует $A = S_A \cap R^n_+$. Поэтому для $x \in R^n_+$ в определении $\|x\|_A$ множество S_A можно заменить на A.

Положительной границей нормального множества A называется

$$\partial^+ A = \Big\{x \in R^n_+ \mid \|x\|_A = 1\Big\}.$$

Утверждение об оптимальности конечной траектории. Пусть $(x_t)_{t=0}^T$ - конечная траектория правильной модели Z Неймана-Гейла с нормальным производственным отображением $f : R^n_+ \to P(R^n_+)$. Эта траектория $(x_t)_{t=0}^T$ оптимальна тогда и только тогда, когда $x_T \in \partial^+\big(f^T(x_0)\big)$.

Доказательство.

Необходимость будем доказывать от противного. Пусть $x_T \notin \partial^+(f^T(x_0))$. Тогда $\exists\ \alpha > 1 \quad \alpha x_T \in \partial^+(f^T(x_0))$, в этом случае для $\varphi \in (R^n_+)^*$ с $\varphi(x_T) = \max\limits_{y \in f^T(x_0)} \varphi(y) > 0$ выполнено $\varphi(\alpha x_T) > \varphi(x_T)$ и траектория $(x_t)_{t=0}^T$ неоптимальна.

Достаточность. Пусть $x_T \in \partial^+(f^T(x_0))$. Тогда $x_T \in f^T(x_0) \setminus ri(f^T(x_0))$, то есть x_T - относительно граничная точка выпуклого множества $f^T(x_0)$. По теореме об опорной гиперплоскости существует гиперплоскость $\{x \in X \mid \varphi(x) = a\}$, опорная к $f^T(x_0)$ в точке x_T. Можно считать $a > 0$, тогда $\varphi \in (R^n_+)^*$ и траектория $(x_t)_{t=0}^T$ оптимальна. $\diamondsuit$

Утверждение о пределе множеств. Пусть $(A_k)_{k=1}^\infty$ - последовательность телесных нормальных множеств, $A_k \subset X$, причём $A_k \to A$ в метрике Хаусдорфа, множество A - также телесное нормальное множество. Тогда

$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ k_\varepsilon \in N \quad \forall\ k > k_\varepsilon$

$$\partial^+ A_k \subset \partial^+ A + \varepsilon S, \tag{9}$$

где $S = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq 1\}$ - единичный шар пространства X.

Доказательство. Тот факт, что A - телесное нормальное множество, следует из определений. Формулу (9) будем доказывать от противного. Пусть $\exists\ \varepsilon_0 > 0\ \forall\ k = 1, 2, \ldots \quad \partial^+ A_k \not\subset \partial^+ A + \varepsilon_0 S$. Тогда найдется такая последовательность $(x_k)_{k=1}^\infty$, что

$$x_k \in \partial^+ A_k,\ x_k \notin \partial^+ A + \varepsilon_0 S. \tag{10}$$

Если $x_k \in \partial^+ A_k$, то существует $\varphi_k \in (R_n^+)^*$ с $\varphi_k(x_k) = \max\limits_{y \in A_k} \varphi_k(y)$. Для $\varphi \in (R_+^n)^*$ определим $\|\varphi\|_A = \max\limits_{\|y\|_A \leq 1} \varphi(y) = \max\limits_{y \in A} \varphi(y)$. Можно выбрать φ_k так, что $\|\varphi_k\|_A = 1$.

Из компактности множеств считаем, что существуют пределы последовательностей (переходя на самом деле к подпоследовательностям): $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0,\ \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi_0$.

Из $x_k \in \partial^+ A_k \subset A_k,\ A_k \to A$ следует $x_0 \in A$, то есть $\|x_0\|_A \leq 1$.

Из $\|\varphi_k\|_A = 1$ следует, что $\|\varphi_0\|_A = 1$.

На множестве $\partial S_A^* = \Big\{\psi \in (R_+^n)^* \mid \|\psi\|_A = 1\Big\}$ определим функционалы p_k, p следующим образом:

$$p_k(\psi) = \max_{y \in A_k} \psi(y),\ p(\psi) = \max_{y \in A} \psi(y).$$

Тогда $p(\psi) = \|\psi\|_A = 1$.

Из условия $A_k \to A$ следует, что p_k равномерно стремятся к p. Отсюда получаем $p_k(\varphi_k) \to p(\varphi_0) = 1$. Это означает, что $\varphi_0(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} p_k(\varphi_k) = p(\varphi_0) = \max\limits_{y \in A} \varphi_0(y) = 1$. Следовательно, $||x_0||_A = 1$, так как иначе найдётся такое число $\alpha > 1$, что $\alpha x_0 \in A$ и $\varphi_0(\alpha x_0) > \varphi_0(x_0)$. Отсюда $x_0 \in \partial^+ A$, что противоречит предположениям (10). Утверждение доказано. $\diamondsuit$

Отметим без доказательства следующую теорему.

Теорема Бляшке [6]. Если множество D компактно, то пространство $CP(D)$ в метрике Хаусдорфа также компактно.

Далее снова переходим к правильной модели Неймана-Гейла с нормальным квазилинейным производственным отображением $f : R^n_+ \to P(R^n_+)$.

Для нормального множества A определим **множество** $G_t(A) = f^{-t}\left(\partial^+ f^t(A)\right) \cap A$ для $t = 0, 1, \dots$.

Утверждение о множествах $G_t(A)$. Если A - телесное нормальное множество в R^n_+ и f - нормальное многозначное отображение, то множества $G_t(A)$ компактные и обладают свойством: $G_0(A) = \partial^+ A \supset G_1(A) \supset G_2(A) \supset \dots \supset G_t(A) \supset \dots$.

Доказательство утверждения сводится к доказательству включения $(f^{-(t+1)}\partial^+ f^{t+1}(A)) \cap A \subset (f^{-t}\partial^+ f^t(A)) \cap A$. Заменим $B = f^t(A)$. Тогда предыдущее включение эквивалентно $(f^{-1}(\partial^+ f(B))) \cap A \subset (\partial^+ B) \cap A$. Последнее включение мы и будем доказывать. Надо доказать, что выполняется включение $\partial^+ f(B) \subset f(\partial^+ B)$. Пусть $y \in \partial^+ f(B)$, это означает, что $\inf\{\lambda \mid y \in \lambda f(B)\} = 1$. Но $\lambda f(B) = f(\lambda B)$. Это означает, что $\exists\, x \in R^n_+,\ y \in f(x),\ \inf\{\lambda \mid x \in \lambda B\} = 1$, то есть $x \in \partial^+ B$. Отсюда следует $y \in f(\partial^+ B)$. Это доказывает требуемое включение и все утверждение. Компактность $G_t(A)$ следует из определений. $\diamondsuit$

Обозначим $G(A) = \bigcap\limits_t G_t(A)$, тогда в метрике Хаусдорфа $G_t(A) \to G(A)$, при этом множество $G(A)$ компактное [8].

Теорема о магистрали в сильной форме. Пусть $f : R^n_+ \to P(R^n_+)$ - нормальное квазилинейное отображение, причём:

а) существует телесное нормальное множество A со свойством $\alpha A = f(A)$, где α - темп роста модели Z (это множество A называется **собственным** для отображения f);

б) существует функционал $\varphi \in r(\Pi_\alpha)$, который принимает на множестве $G(A)$ постоянное значение.

Если точка $x_0 \in R^n_+$ такова, что $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha^{-t} f^t(x_0) = A$ (в метрике Хаусдорфа), то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $t_0, k_0 \in N$, что для всякой конечной оптимальной траектории $(x_t)_{t=0}^T$, $T > t_0 + k_0$, исходящей из точки x_0, выполняется неравенство

$$\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha\right) \le \varepsilon,$$

при $t_0 < t < T - k_0$.

Доказательство теоремы опирается на две леммы. Обе леммы доказываются в условиях теоремы. Не умаляя общности, считаем $\alpha = 1$, заменив везде f на αf.

Лемма о множествах B^k_t. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ t_k \in N\ \forall\ t > t_k$ выполняется $B^k_t \subset (f^{-k}(\partial^+ A) \cap A) + \varepsilon S$, $(k = 1, 2, \ldots)$, где $B^k_t = G_k(B_t)$, $B_t = f^t(x_0)$.

Доказательство. Покажем, что по $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\varepsilon_1 > 0$, что

$$f^{-k}(\partial^+ A + \varepsilon_1 S) \cap (A + \varepsilon_1 S) \subset f^{-k}(\partial^+ A) \cap A + \varepsilon S. \tag{11}$$

Пусть это не так, тогда $\forall\ m \in N\ \exists\ y_m \in \left[f^{-k}(\partial^+ A + \frac{1}{m} S)\right] \cap \big(A + \frac{1}{m} S\big)$, $\quad y_m \notin \big((f^{-k}(\partial^+ A) \cap A) + \varepsilon S\big)$. Из-за компактности соответствующих множеств можно предполагать, что $y_m \to y$. Тогда $y \in f^{-k}(\partial^+ A) \cap A$ и $y \notin f^{-k}((\partial^+ A) \cap A) + \varepsilon S$. Это противоречие доказывает соотношение (11).

Из условий теоремы следует, что $B_t \to A$, и, следовательно,

$$B_t \subset A + \varepsilon_1 S \tag{12}$$

для достаточно больших $t > \tau_1$. Из утверждения о пределе множеств вытекает существование такого τ_2, что $\forall\ t > \tau_2\quad \partial^+ B_t \subset \partial^+ A + \varepsilon_1 S$ и $f^{-k}(\partial^+ B_t) \subset f^{-k}(\partial^+ A + \varepsilon_1 S)$. Тогда для $t > t_k = \max\{\tau_1, \tau_2 - k\}$ выполняются включения

$$B^k_t = f^{-k}(\partial^+ B_{t+k}) \cap B_t \subset f^{-k}(\partial^+ A + \varepsilon_1 S) \cap B_t.$$

С помощью (12) получаем:

$$B_t^k \subset f^{-k}(\partial^+ A + \varepsilon_1 S) \cap (A + \varepsilon_1 S).$$

Далее применяем формулу (11):

$$B_t^k \subset f^{-k}(\partial^+ A) \cap A + \varepsilon S,$$

что и означает утверждение леммы.$\diamondsuit$

Введём обозначения двух типов **множеств**: $Q(\delta, t) = \Big\{x \in B_t \mid \varphi(x) \geq (1-\delta) \max\limits_{y \in B_t} \varphi(y)\Big\}$ и $Q(\delta) = \Big\{x \in A \mid \varphi(x) \geq (1-\delta) \max\limits_{y \in A} \varphi(y)\Big\}$ для любых $\delta \in (0;1), \varphi \in (R_+^n)^*, \varphi \neq 0$.

Лемма о множествах $Q(\delta, t)$. Выполняется соотношение $\lim\limits_{t \to \infty} Q(\delta, t) = Q(\delta)$ (в метрике Хаусдорфа).

Доказательство. Положим $c_t = \max\limits_{y \in B_t} \varphi(y),\ c = \max\limits_{y \in A} \varphi(y)$.
Так как $B_t \to A$, то $c_t \to c$.
Множества $Q(\delta, t)$ компактны, последовательность множеств $(Q(\delta, t))_{t=0}^{\infty}$ ограничена. Тогда по теореме Бляшке существует сходящаяся подпоследовательность $(Q(\delta, t_k))_{k=0}^{\infty}$. Покажем, что $Q(\delta) = \lim\limits_{k \to \infty} Q(\delta, t_k.)$
Пусть $x \in \eta = \lim\limits_{k \to \infty} Q(\delta, t_k)$. Тогда существует такая последовательность $(x_{t_k})_{k=0}^{\infty}$ элементов множества $Q(\delta, t_k)$, что $x_{t_k} \to x$. Так как $Q(\delta, t_k) \subset B_{t_k}$, то $x_{t_k} \in B_{t_k}$ и $x \in A$. Так как $\varphi(x_{t_k}) \geq (1-\delta) c_{t_k}$, то $\varphi(x) \geq (1-\delta)c$. Отсюда следует $x \in Q(\delta)$ и $\eta \subset Q(\delta)$.
Наоборот, пусть $x \in A$ и $\varphi(x) > (1-\delta)c$. Тогда существует последовательность $(x_{t_k})_{k=0}^{\infty}$, что $x_{t_k} \in B_{t_k},\ x_{t_k} \to x$. Положим $\varepsilon = \varphi(x) - (1-\delta)c$. Тогда найдется такое k_1, что $\forall\ k > k_1$ выполняются неравенства $(1-\delta)c_{t_k} < (1-\delta)c + \frac{\varepsilon}{2},\ \varphi(x_{t_k}) > \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $k > k_1$ справедливо $\varphi(x_{t_k}) > \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{2} = (1-\delta)c + \frac{\varepsilon}{2} > (1-\delta)c_{t_k}$. Отсюда следует $x_{t_k} \in Q(\delta, t_k)$, что означает $x \in \eta$. Так как η замкнуто, то $Q(\delta) \subset \eta$. Вместе с предыдущей частью доказательства получаем $\eta = Q(\delta)$. Поскольку η - любая предельная точка последовательности $(Q(\delta, t))_{t=1}^{\infty}$, то это означает, что $\lim\limits_{t \to \infty} Q(\delta, t) = Q(\delta)$. $\diamondsuit$

Теперь перейдём к доказательству теоремы о магистрали в сильной форме.

Доказательство **теоремы о магистрали в сильной форме.** Рассмотрим собственное множество A. Выполняются соотношения

$$G_k(A) = f^{-k}(\partial^+ A) \cap A, \quad k \in N,$$

$$f^{-k}(\partial^+ A) \cap A \to G(A).$$

Выберем малое $\delta_1 > 0$. Тогда из предыдущего следует, что существует $k_0 \in N$, что выполнено включение

$$f^{-k_0}(\partial^+ A) \cap A \subset G(A) + \frac{1}{4}\delta_1 S.$$

По лемме о множествах B_t^k для достаточно больших t выполняется

$$B_t^{k_0} \subset \Big(f^{-k_0}(\partial^+ A) \cap A\Big) + \frac{1}{4}\ \delta_1 S,$$

тогда

$$B_t^{k_0} \subset G(A) + \frac{1}{2}\delta_1 S. \tag{13}$$

Построим $Q(\delta_1, t),\ Q(\delta_1)$ по функционалу $\varphi \in (R^n_+)^*$, указанному в п. б) теоремы.

Докажем, что $\forall\ t \geq 0$ выполняется включение

$$\Big(Q(\delta_1, t) + \delta_1 S\Big) \cap B_t \subset Q\left(\delta_1\Big(1 + \frac{||\varphi||}{c_t}\Big), t\right), \tag{14}$$

где $c_t = \max\limits_{y \in B_t} \varphi(y)$.

Действительно, пусть $x \in (Q(\delta_1, t) + \delta_1 S) \cap B_t$. Тогда найдутся такие x_1, x_2, что $x = x_1 + x_2,\ \varphi(x_1) \geq (1 - \delta_1)c_t,\ \varphi(x_2) \geq -\delta_1 ||\varphi||$. Отсюда следует $\varphi(x) \geq \Big(1 - \delta_1\Big(1 + \frac{||\varphi||}{c_t}\Big)\Big)c_t$, что означает справедливость соотношения (14).

Обозначим через $M = 2 + \frac{||\varphi||}{c}$. Так как по лемме о множествах $Q(\delta, t)$ $c_t \to c$, то $1 + \frac{||\varphi||}{c_t} \leq M$ для достаточно больших t.

Тогда для этих t из (14) получаем

$$(Q(\delta_1, t) + \delta_1 S) \cap B_t \subset Q(M\delta_1, t). \tag{15}$$

Из условия б) теоремы следует

$$G(A) \subset Q(\delta_1). \tag{16}$$

Это включение обосновывается соотношениями $G(A) \subset \partial^+ A$, $\partial^+ A \subset Q(\delta_1)$. Последнее верно из-за того, что φ постоянно на $G(A)$, а это значение $\varphi(G(A))$ должно быть равно $\max\limits_{y\in A}\varphi(y)$ на основе свойств $\partial^+ A$.
Из леммы о множествах $Q(\delta, t)$ следует, что для достаточно больших t

$$Q(\delta_1) \subset Q(\delta_1, t) + \frac{1}{2}\delta_1 S.$$

Отсюда и из формул (15), (16) получаем для достаточно больших t следующие включения:

$$\Big(G(A)+\frac{1}{2}\delta_1 S\Big)\cap B_t \subset \Big(Q(\delta_1)+\frac{1}{2}\delta_1 S\Big)\cap B_t \subset \Big(Q(\delta_1,t)+\delta_1 S\Big)\cap B_t \subset Q(M\delta_1, t).$$

Так как $B_t^{k_0} \cap B_t = B_t^{k_0}$, то из последних включений и (13) следует существование таких t_0, k_0, что

$$B_t^{k_0} \subset Q(M\delta_1, t) \text{ для } t \geq t_0. \tag{17}$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме Мак-Кензи существует такое $\delta > 0$, что $\forall\ (x,y) \in Z$ с условием $\rho\Big(\frac{(x,y)}{\|x\|}, N_\alpha\Big) \geq \varepsilon$ выполняется неравенство $\varphi(y) < (1-\delta)\varphi(x)$. Положим в (17) $\delta_1 = \frac{1}{M}\delta^2$. Тогда $\forall\ t > t_0$ выполняется $B_t^{k_0} \subset Q(\delta^2, t)$. Последовательность $(c_t)_{t=0}^{\infty}$, где $c_t = \max\limits_{y\in B_t}\varphi(y)$, сходится к $c = \max\limits_{y\in A}\varphi(y)$. В этом случае t_0 можно считать таким большим, что $\forall\ t > t_0$

$$\max_{y\in B_t}\varphi(y) \leq (1+\delta)\max_{y\in B_{t+1}}\varphi(y).$$

Рассмотрим конечную траекторию $(x_t)_{t=0}^{T}$ с $T > t_0 + k_0$. Пусть для некоторого t, $t_0 < t < T - k_0$ выполняется $\rho\Big(\frac{(x_{t-1},x_t)}{\|x_{t-1}\|}, N_\alpha\Big) \geq \varepsilon$. Тогда по лемме Мак-Кензи выполняются неравенства $\varphi(x_t) < (1-\delta)\varphi(x_{t-1}) \leq (1-\delta)\max\limits_{y\in B_{t-1}}\varphi(y) \leq (1-\delta^2)\max\limits_{y\in B_t}\varphi(y)$. Получаем $x_t \notin Q(\delta^2, t)$, то есть $x_t \notin B_t^{k_0}$.
По определению

$$B_t^{k_0} = G_{k_0}(B_t) = f^{-k_0}(\partial^+ B_{t+k_0}) \cap B_t.$$

Так как $x_t \in B_t$ и $x_t \notin B_t^{k_0}$, то $x_t \notin f^{-k_0}(\partial^+ B_{t+k_0})$. Отсюда следует, что $f^{k_0}(x_t) \cap \partial^+ B_{t+k_0} = \emptyset$. Это означает, что $x_{t+k_0} \notin \partial^+ f^{t+k_0}(x_0)$, а отсюда следует, что последовательность $(x_\tau)_{\tau=0}^{t+k_0}$ не оптимальна и последовательность $(x_t)_{t=0}^{T}$ также не оптимальна. Следовательно, для любой оптимальной конечной траектории $(x_t)_{t=0}^{T}$ $(T > t_0 + k_0)$ выполняется неравенство

$$\rho\left(\frac{(x_{t-1}, x_t)}{\|x_{t-1}\|}, N_\alpha\right) < \varepsilon$$

для $t_0 < t < T - k_0$.

Теорема о магистрали в сильной форме полностью доказана.$\diamondsuit$

2.4 Упражнения

Решить следующие задачи, примеры или доказать сформулированные факты. Соотвествующие обозначения и понятия приведены в тексте раздела.

1. Сформулировать определение полунепрерывности сверху для функционалов на языке последовательностей.

2. Множество D в доказательстве утверждения 4.5 является выпуклым замкнутым конусом.

3. Для неймановского показателя роста существует набор $(\alpha(z),\ (\bar{x}, \bar{y}),\ \bar{\varphi})$, для которого выполнены все условия равновесия, кроме, возможно, $\bar{\varphi}(\bar{y}) > 0$.

4. Множество N_α является гранью конуса Z.

4. $\|x\|_A$ удовлетворяет всем условиям нормы.

5. Формула (7) определяет функцию расстояния.

Заключение

Многозначные отображения позволяют создать общее описание процессов экономической динамики. Сюда вкладываются модели Леонтьева "затраты - выпуск"и серия моделей Неймана и Неймана-Гейла. В наиболее общем виде проявляются свойства магистральности оптимальных траекторий. Приведены две формы теоремы о магистралях - слабая и сильная. В различных постановках моделей экономической динамики теоремы о магистральных свойствах оптимальных траекторий могут иметь различную форму, но принципиально эти формы мало отличаются от указанных здесь вариантов.

Список литературы

1. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000.
4. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.
5. Левин М.И., Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математические модели экономического взаимодействия. М.: Наука, 1993.
6. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
7. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
8. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
9. Newmann, J. von. Uber ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung das Brounerschen Fixpunkt-satzes, Ergebnisse eines Math. Kolloguiums, No 8, Vienna, 1937.