

Весенний этап краевой заочной олимпиады 2011 г.

1. Можно ли квадрат разрезать тремя прямыми на семь равновеликих частей?
2. Простое число назовем крутым, если при любой перестановке его цифр снова получается простое число. Сколько различных цифр может содержать в своей записи крутое число?
3. Пусть x, y, z - натуральные числа, такие что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12.
4. Для заданного n возьмем число 8^n . У него вычислим сумму цифр, у полученного числа вновь вычислим сумму цифр, и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число, если $n = 2011$?
5. Маша купила общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровала все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Миша вырвал из этой тетради 32 листов и сложил все 64 числа, которые на них написаны. Мог ли он получить число 2011?
6. Пусть числа a, b, c и d таковы, что $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. Доказать, что справедливо неравенство: $(a + b + c + d + 1)^2 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.
7. Дана последовательность x_k такая, что $x_1 = 1, x_{n+1} = n \sin(nx) + 1$. Докажите, что последовательность непериодична.
8. Длины сторон многоугольника равны a_1, a_2, \dots, a_n . Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \dots + a_n)$. Докажите, что $f(A) = f(B)$, где A - сумма длин нескольких сторон многоугольника, B - сумма длин остальных его сторон.
9. Судебный пристав обнаружил в офисе Газпрома запертый сейф. Кодовый замок, состоит из 100 кнопок с лампочками, расположенными в квадрате 10 на 10. При нажатии на любую кнопку все лампочки, стоящие с ней в одном ряду (как горизонтальном, так и вертикальном) общим числом 19 штук меняют свое состояние (загораются или гаснут). Лишь когда все кнопки зажгутся, сейф откроется. Сколько кнопок должен нажать судебный пристав, чтобы как можно скорее открыть сейф?
10. Найдите все функции f , определенные на множестве вещественных чисел, такие, что $f(x)$ строго возрастает, и $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$ для всех вещественных x , где через f^{-1} обозначена функция обратная к f .