Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Дальневосточный государственный университет

Т.В. Пак

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

В л а д и в о с т о к
Издательство Дальневосточного университета
2006

ББК
П75

Рецензент:
А.Г. Колобов, к.ф.-м.н. (ИМКН ДВГУ, РАН);

Пак Т.В.
П75 **Лабораторные работы по Численным методом.** Учебно-методическое пособие. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2006. - 24с.

Лабораторные работы предназначены для студентов второго курса Института математики и компьютерных наук. Они поддерживают курс "Численные методы"по следующим темам: Интерполирование, дифференцирование, интегрирование, сплайны, решение нелинейных и алгебраических уравнений.

Для студентов математических специальностей.

$П\frac{2405000000}{180(03)-2006}$ ББК

1 Содержание

Тема 1. Интерполирование функции с помощью многочленов Лагранжа и многочленов Ньютона с разделенными разностями

1. На отрезке [a,b] получить таблицу значений функции y=f(x) в равноотстоящих точках $x_i = a + i \cdot h; i = 0, 1, 2, \ldots, 10; h = (b-a)/10$. Варианты функции y=f(x) и отрезка [a,b] см. в таблице 1.

2. С помощью интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона с разделенными разностями выполнить линейную интерполяцию в точке $\bar{x}$. Допустима ли линейная интерполяция таблично заданной функции в точке $\bar{x}(x_i < \bar{x} < x_{i+1})$, обеспечивающая погрешность, не превосходящую 10^{-4}? Сравнить результаты со значением, получаемым при непосредственном вычислении по формуле $\bar{y} = f(\bar{x})$. Варианты точки $\bar{x}$ см. в таблице 1.

3. С помощью интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона с разделенными разностями выполнить квадратичную интерполяцию в точке $\bar{x}$, используя три ближайшие точки x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, $(x_{i-1} < \bar{x} < x_{i+1})$. Допустима ли квадратичная интерполяция таблично заданной функции в точке $\bar{x}$, обеспечивающая погрешность, не превосходящую 10^{-5}? Сравнить результаты со значением, получаемым при непосредственном вычислении по формуле $\bar{y} = f(\bar{x})$.

<u>Этапы выполнения лабораторной работы</u>.

• Построить таблицу из 11 значений выбранной функции.

• По интерполяционной формуле Лагранжа первого порядка вычислить $L_1(\bar{x}) = f(x_i) \cdot (\bar{x} - x_{i+1})/(x_i - x_{i+1}) + f(x_{i+1}) \cdot (\bar{x} - x_i)/(x_{i+1} - x_i)$.

• С помощью формулы остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа первого порядка
$R_1(x) = f''(\xi)\omega_2(x)/2, \quad \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $\omega_2(x) = (x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})$,
на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ оценить минимальное и максимальное значения $f''(x)$, а затем минимальное и максимальное значения остаточного члена $R_1(x)$.

• Проверить, выполняется ли неравенство $\min R_1 < R_1(\bar{x}) < \max R_1$, $R_1(\bar{x}) = L_1(\bar{x}) - f(\bar{x})$. Ответить на вопрос п.2.

• По интерполяционной формуле Лагранжа второго порядка вычислить

$$L_2(x) = f(x_{i-1})\frac{(\bar{x} - x_i)(\bar{x} - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + f(x_i)\frac{(\bar{x} - x_{i-1})(\bar{x} - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} +$$
$$+ f(x_{i+1})\frac{(\bar{x} - x_{i-1})(\bar{x} - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}.$$

• С помощью формулы остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа второго порядка

$R_2(x) = f'''(\xi)\omega_3(x)/6, \quad \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \omega_3(x) = (x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$, на $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ оценить минимальное и максимальное значения $f'''(x)$, а затем минимальное и максимальное значения остаточного члена $R_2(x)$.

• Проверить, выполняется ли неравенство $\min R_2 < R_2(\bar{x}) < \max R_2$, $R_2(\bar{x}) = L_2(\bar{x}) - f(\bar{x})$. Ответить на вопрос п.3.

• Построить таблицу разделенных разностей по узлам x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Вычислить интерполяционные многочлены Ньютона:
$L_1(\bar{x}) = f(x_i) + f(x_i, x_{i+1})(\bar{x} - x_i)$ и
$L_2(\bar{x}) = f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}, x_i)(\bar{x} - x_{i-1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(\bar{x} - x_{i-1}) \cdot (\bar{x} - x_i)$.
Сравнить с соответствующими результатами, полученными по формулам Лагранжа.

Таблица 1.

№	y=f(x)	a	b	x*	x**	x***	x****
1	y=x^2+ ln(x)	0.4	0.9	0.52	0.42	0.87	0.67
2	y=x^2− lg($x+2$)	0.5	1.0	0.53	0.52	0.97	0.73
3	y=x^2+ ln(x) − 4	1.5	2.0	1.52	1.52	1.97	1.77
4	y=(x-1)^2 -0.5e^x	0.1	0.6	0.13	0.12	0.57	0.33
5	y=(x-1)^2 -e^{-x}	1.0	1.5	1.07	1.02	1.47	1.27
6	y=x^3− sin(x)	0.6	1.1	0.92	0.62	1.07	0.83
7	y=4x− cos(x)	0.1	0.6	0.37	0.12	0.57	0.37
8	y=x^2− sin(x)	0.5	1.0	0.77	0.52	0.97	0.73
9	y=x− cos(x)	0.5	1.0	0.92	0.53	0.98	0.77
10	y=x^2− cos(x)	0.1	0.6	0.37	0.12	0.58	0.33
11	y=x^2− sin(x)	0.4	0.9	0.53	0.43	0.86	0.67
12	y=x^2− cos($0.5x$)	0.4	0.9	0.64	0.42	0.87	0.63
13	$y = x - 2\cos(0.5x)$	0.4	0.9	0.71	0.43	0.87	0.67
14	y=x− sin(x)	0.6	1.1	0.88	0.63	1.08	0.83
15	y=2x− cos(x)	0.1	0.6	0.44	0.13	0.58	0.37
16	y=x^2+ ln($x+5$)	0.5	1.0	0.73	0.52	0.97	0.73
17	y=0.5x^2+ cos($2x$)	0.6	1.1	0.84	0.62	1.07	0.83
18	y=x^2 − 0.5e^{-x}	0.1	0.6	0.37	0.12	0.58	0.33
19	y=x^2+ lg(x)	0.4	0.9	0.53	0.43	0.86	0.67
20	y=x− lg($x+2$)	0.5	1.0	0.77	0.52	0.97	0.73
21	y=x^2− lg($0.5x$)	0.5	1.0	0.92	0.53	0.98	0.77
22	y=x^3− cos($2x$)	0.1	0.6	0.37	0.12	0.58	0.33
23	y=x^2+ cos($x/2$)	0.1	0.6	0.13	0.12	0.57	0.33
24	y=x/2− cos($x/2$)	0.4	0.9	0.64	0.42	0.87	0.63

Тема 2. Интерполирование функции с помощью интерполяционных формул с конечными разностями

1. Построить таблицу конечных разностей для полученной при выполнении лабораторной работы №1 табличной функции.

2. Для таблицы с равноотстоящими узлами используются формулы:

1-я формула Ньютона по $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x = x_0 + th$, $0 < t < 1$,

$$L_n(x) = f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2} f^2_1 + \ldots + \frac{t(t-1)\cdots(t-(n-1))}{n!} f^n_{n/2},$$

2-я формула Ньютона по $x_0, x_{-1}, x_{-2} \ldots, x_{-n}, x = x_0 + th, -1 < t < 0$,

$$L_n(x) = f_0 + tf^1_{-1/2} + \frac{t(t+1)}{2} f^2_{-1} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+(n-1))}{n!} f^n_{-n/2},$$

1-я формула Гаусса по $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2} \ \ldots, x_{n/2}, x_{-n/2}, x = x_0 + th$, $0 < t \le 0.5$,

$$L_n(x) = f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2} f^2_0 + \ldots + \frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-(\frac{n}{2}-2)^2)(t-(\frac{n}{2}-1))}{n!} f^n_0,$$

2-я формула Гаусса по $x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, \ldots, x_{-n/2}, x_{n/2}, x = x_0 + th$, $-1/2 < t < 0$,

$$L_n(x) = f_0 + tf^1_{-1/2} + \frac{t(t+1)}{2} f^2_0 + \ldots + \frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-(\frac{n}{2}-2)^2)(t+(\frac{n}{2}-1))}{n!} f^n_0.$$

Формула Стирлинга

$$L(x_0+th) = f_0 + t\mu f^1_0 + \frac{t^2}{2!} f^2_0 + \ldots + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} \mu f^{2n-1}_0 +$$
$$+ \frac{t^2(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!} f^{2n}_0, \qquad \frac{1}{2}[f^{2n-1}_{1/2} + f^{2n-1}_{-1/2}] = \mu f^{2n-1}_0.$$

Формула Бесселя

$$L_{2n+2}(x_0+th) = \mu f_{1/2} + (t - \frac{1}{2}) f^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!} \mu f^2_{1/2} + \ldots +$$
$$+ \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} \mu f^{2n}_{1/2} +$$
$$+ \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-\frac{1}{2})}{(2n+1)!} f^{2n+1}_{1/2}, \qquad \frac{1}{2}[f^{2n}_1 + f^{2n}_0] = \mu f^{2n}_{1/2}.$$

Выбрав подходящие интерполяционные формулы, выполнить интерполирование табличной функции в точках x^{**}, x^{***}, x^{****}, используя максимально возможное количество узлов для каждой формулы. Варианты точек x^{**}, x^{***}, x^{****} см. в таблице 1.

3. Оценить погрешность интерполирования в этих точках, аналогично

тому, как это сделано в лабораторной работе №1. Сравнить результаты с соответствующими значениями, получаемыми при непосредственном вычислении по формуле $y = f(x)$.

Этапы выполнения лабораторной работы.

• Построить таблицу конечных разностей по значениям табличной функции.

• По соответствующим интерполяционным формулам вычислить $L_n(x^{**})$, $L_n(x^{***})$, $L_n(x^{****})$.

• С помощью формулы остаточного члена интерполяционного многочлена

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)/(n+1)!,\ \xi \in [a, b],\ \omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n),$$

оценить минимальное и максимальное значения $f^{(n+1)}(x)$ - производной функции y=f(x), а затем минимальное и максимальное значения остаточного члена $R_n(x)$.

• Проверить, выполняется ли неравенство $\min R_n < R_n(z) < \max R_n$, $R_n(z) = L_1(z) - f(z)$, $z = x^{**}, x^{***}, x^{****}$.

Тема 3. Дифференцирование таблично заданной функции с помощью многочлена Лагранжа

1. Дифференцируя заданное число раз интерполяционную формулу Лагранжа, построить формулу численного дифференцирования приближенного вычисления производной таблично заданной функции $f(x)$: $L_n^{(k)}(x_m)) \approx f^{(k)}(x_m)$, значения n, k, m см. в таблице 2. Сравнить результаты со значением, получаемым при непосредственном вычислении по формуле $f^{(k)}(x_m)$.

Этапы выполнения лабораторной работы.

• Прежде чем дифференцировать интерполяционную формулу Лагранжа, сначала привести к виду, удобному для дифференцирования, поскольку в таблице расстояние между соседними узлами равно h, то заменить все разности $(x_i - x_j)$ на $(i - j) \cdot h$.

• С помощью дифференцирования формулы остаточного члена интерполяционного многочлена

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \quad \xi \in [a, b],\ \omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n),$$

получить и оценить минимальное и максимальное значения остаточного члена $R_{n,k}(x)$.

• Проверить, выполняется ли неравенство

$\min R_{n,k} < R_{n,k}(x) < \max R_{n,k}$, $R_{n,k}(x_m) = L_n^{(k)}(x_m) - f^{(k)}(x_m)$.

Таблица 2.

	к = 2			к = 1			
	n =3	n = 4	n = 5	n =3	n = 4	n = 5	n = 6
m=0	16	20	25	1	5	10	31
m=1	17	21	26	2	6	11	32
m=2	18	22	27	3	7	12	33
m=3	19	23	28	4	8	13	34
m=4		24	29		9	14	35
m=5			30			15	36
m=6							37

Тема 4. Квадратурные формулы

Вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$

1. по составной формуле левых прямоугольников;
2. по составной формуле правых прямоугольников;
3. по составной формуле центральных прямоугольников;
4. по формуле трапеции;
5. по формуле Симпсона;
6. по формуле Веддля:

$$I_{6m} = 0,3h(y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + 2y_6 + \dots$$
$$+5y_{6m-5} + y_{6m-4} + 6y_{6m-3} + y_{6m-2} + 5y_{6m-1} + y_{6m});$$

по формуле Ньютона - Котеса: $I_n = (b-a)\sum\limits_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$

7. $n = 1$, $c_k = (1/2, 1/2)$;
8. $n = 2$, $c_k = (1/6, 4/6, 1/6)$;
9. $n = 3$, $c_k = (1/8, 3/8, 3/8, 1/8)$;
10. $n = 4$, $c_k = (7/90, 32/90, 12/90, 32/90, 7/90)$;
11. $n = 5$, $c_k = (19/288, 75/288, 50/288, 50/288, 75/288, 19/288)$;
12. $n = 6$, $c_k = (41/840, 216/840, 27/840, 272/840, 27/840, 216/840, 41/840)$;

по формуле Гаусса: $I_n = \frac{(b-a)}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f(x_k)$, где $x_k = \dfrac{b+a}{2} + \dfrac{b-a}{2}t_k$

13. $n = 1$, $t_1 = 0$, $c_1 = 2$;
14. $n = 2$, $t_{1,2} = \pm 0,577350$, $c_1 = c_2 = 1$;

15. $n = 3$, $t_{1,3} = \pm 0,774597$, $t_2 = 0$, $c_1 = c_3 = 5/9$, $c_2 = 8/9$;
16. $n = 4$, $t_{1,4} = \pm 0,861136$, $c_1 = c_4 = 0,347855$,
$t_{2,3} = \pm 0,339981$, $c_2 = c_3 = 0,652145$.

В вариантах 1–6 для достижения заданной точности ε сначала вычислить I_n на отрезке [a,b], затем n удвоить и вычислить I_{2n}. Если выполнено неравенство $|I_n - I_{2n}| \le \varepsilon$, то точность считается достигнутой, и I_{2n} принимается за приближенное значение интеграла с точностью ε, в противном случае n снова удваивается, т. е. вычисляют I_{4n} и сравнивают между собой уже I_{2n} и I_{4n} и т. д.

В вариантах 7–16 для достижения заданной точности ε сначала вычислить I_n на отрезке [a,b], затем отрезок делить пополам, и к каждой половине применять квадратурную формулу с заданным n, т.е. вычислить I_{2n}. Если выполнено неравенство $|I_n - I_{2n}| \le \varepsilon$, то точность считается достигнутой и I_{2n} принимается за приближенное значение интеграла с точностью ε, в противном случае каждая половина отрезка [a,b] делится пополам, к каждой половине применяется квадратурная формула с заданным n и сравниваются между собой уже I_{2n} и I_{4n} и т. д. до тех пор, пока не будет либо достигнута точность ε либо не будет произведено заданное количество делений отрезка [a,b].

Тема 5. Сплайны

1. Эрмитовы кубические сплайны

Пусть на сетке $\bar{w}_h = \{x_i,\ i = \overline{0, N},\ x_0 = a,\ x_N = b,\ x_i = x_{i-1} + h_i,\ \sum\limits_{i=1}^{N} h_i = b - a\}$ заданы значения $y_i = f(x_i),\ y'_i = f'(x_i),\ i = \overline{0, N}$.

Определение. Эрмитовым кубическим сплайном называют функцию $S(x)$, удовлетворяющую условиям:
1. $S(x) \in P_{3i}(x)$ для $\forall x \in [x_i,\ x_{i+1}],\ i = \overline{0, N-1}$,
2. $S(x) \in C^1_{[a,b]}$, (т.е. непрерывны $S(x)$ и $S'(x)$ во внутренних узлах),
3. $S(x_i) = f(x_i)$, $S'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \ldots,\ N$.

Эрмитовы сплайны являются локальными. Для их вычисления на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$ достаточно использовать третье условие определения:
$S(x_i) = y_i$, $S'(x_i) = y'_i$, $S(x_{i+1}) = y_{i+1}$, $S'(x_{i+1}) = y'_{i+1}$;
тогда $S(x)$ на отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$ можно записать:

$$S(x) = y_i + y'_i(x - x_i) + a_i \frac{(x - x_i)^2}{2} + b_i \frac{(x - x_i)^3}{6},$$

$$a_i = \frac{6}{h_{i+1}}\Big[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{2y'_i + y'_{i+1}}{3}\Big], \quad b_i = \frac{12}{h^2_{i+1}}\Big[\frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\Big].$$

2. Кубические нелокальные сплайны

Пусть на сетке $\bar{w}_h$ заданы $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, N}$.

Определение. Функция $S(x)$ называется кубическим сплайном, интерполирующим функцию $f(x)$ в узлах сетки $\bar{w}_h$, если выполняются следующие условия:

1. $S(x) \in P_{3i}(x)$, для $\forall x \in [x_i,\ x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$,

2. $S(x) \in C^2[a, b]$, (т.е. непрерывны $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ во всех внутренних узлах),

3. $S(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, N}$.

Легко показать, что этими условиями сплайн определяется неоднозначно, а именно, кубический сплайн, удовлетворяющий данному определению, имеет еще 2свободных параметра. На каждом из N отрезков сплайн определяется 4-мя коэффициентами, итого, на $[a,\ b]$ всего $4N$ коэффициентов. Условие 2): $S(x) \in C^2_{[a,b]}$ дает $3(N-1)$ равенств. Условие интерполяции 1) дает $N+1$ соотношение. Итого: $3N - 3 + N + 1 = 4N - 2$ соотношения.

Два недостающих дополнительных условия, как правило, задаются в виде краевых условий, определяющих значение сплайна или его производных на концах отрезка $[a,\ b]$:
1. $S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b)$.
2. $S''(a) = f''(a), \quad S''(b) = f''(b)$.
3. $S^i(a) = S^i(b)$, $i = 0,\ 1,\ 2$ – в этом случае говорят о периодическом сплайне.
4. $S'''(x_1 + 0) = S'''(x_1 - 0), \quad S'''(x_{N-1} - 0) = S'''(x_{N-1} + 0)$.

3. Построение кубического сплайна через наклоны

Кубический сплайн можно рассматривать как Эрмитов сплайн, удовлетворяющий условиям:

$$S(x_i) = y_i, \quad S'(x_i) = y'_i;$$

$$S(x) = y_i + y'_i(x - x_i) + a_i\frac{(x - x_i)^2}{2} + b_i\frac{(x - x_i)^3}{6};$$

$$S'(x) = y'_i + a_i(x - x_i) + b_i\frac{(x - x_i)^2}{2}.$$

Вводя обозначение: $S'(x_i) = m_i$ - наклоны, $m_i = y_i'$, по построению получают:

$$S(x_{i+1}) = y_i + m_i h_{i+1} + a_i \frac{h_{i+1}^2}{2} + b_i \frac{h_{i+1}^3}{6} = y_{i+1},$$
$$S'(x_{i+1}) = y_i' + a_i h_{i+1} + b_i \frac{h_{i+1}^2}{2} = y_{i+1}'.$$

Имеют систему двух уравнений с двумя неизвестными a_i и b_i:

$$a_i h_{i+1} + b_i \frac{h_{i+1}^2}{2} = m_{i+1} - m_i,$$
$$a_i \frac{h_{i+1}^2}{2} + b_i \frac{h_{i+1}^3}{6} = y_{i+1} - y_i - m_i h_{i+1}.$$

Умножают первое уравнение в системе на $-h_{i+1}/2$ и складывают со вторым. Тогда

$$b_i\Big(\frac{h_{i+1}^3}{4} - \frac{h_{i+1}^3}{6}\Big) = \frac{m_{i+1}}{2} h_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) + \frac{m_i}{2} h_{i+1}.$$

Отсюда получают выражение для b_i:

$$b_i = \frac{12}{h_{i+1}^2}\Big(\frac{m_{i+1} + m_i}{2} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}\Big).$$

Затем умножают первое уравнение в системе на $-h_{i+1}/3$ и складывают со вторым. Тогда

$$a_i\Big(\frac{h_{i+1}^2}{3} - \frac{h_{i+1}^2}{2}\Big) = \frac{m_{i+1}}{3} h_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) + \frac{2m_i}{3} h_{i+1}$$

и коэффициент a_i имеет вид:

$$a_i = \frac{6}{h_{i+1}}\Big(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{3}\Big).$$

$$\begin{array}{ll} S''(x) = a_i + b_i(x - x_i) & \text{на } [x_i,\ x_{i+1}], \\ S''(x) = a_{i-1} + b_{i-1}(x - x_{i-1}) & \text{на } [x_{i-1},\ x_i]. \end{array}$$

Из второго условия определения кубического сплайна, а именно, непрерывности второй производной на [a,b], в том числе и в узлах сетки:

$$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0)$$

получают

$$a_{i-1} + b_{i-1} h_i = a_i$$

или

$$\frac{1}{h_i}\Big(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{m_i+2m_{i-1}}{3}\Big)+\frac{2}{h_i}\Big(\frac{m_i+m_{i-1}}{2}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\Big)=$$
$$=\frac{1}{h_{i+1}}\Big(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{m_{i+1}+2m_i}{3}\Big).$$

Далее осуществляют следующие выкладки:

$$-\frac{m_i+2m_{i-1}}{3h_i}+\frac{m_i+m_{i-1}}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}-\frac{m_{i+1}+2m_i}{3h_{i+1}},$$
$$\frac{2m_i+m_{i-1}}{3h_i}+\frac{m_{i+1}}{3h_{i+1}}+\frac{2m_i}{3h_{i+1}}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2},$$
$$\frac{m_{i-1}}{h_i}+2m_i\Big(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\Big)+\frac{m_{i+1}}{h_{i+1}}=3\Big(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}\Big).$$

Вводят обозначения: $\mu_i=\dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$; $\lambda_i=1-\mu_i=\dfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$, $\mu_i+\lambda_i=1$.
В результате получают систему $N{-}1$ уравнения с $N{+}1$ неизвестным m_0, $\ldots$, m_N:

$$\mu_i m_{i-1}+2m_i+\lambda_i m_{i+1}=3\Big(\lambda_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}+\mu_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\Big),\ i=\overline{1,N{-}1}. \quad (1)$$

Для замыкания системы необходимо добавить два уравнения:
1 краевое условие: $S'(a)=y'(a)$; $S'(b)=y'(b)$, тогда $m_0=y_0'$; $m_N=y_N'$.
2 краевое условие: $S''(a)=y''(a)$; $S''(b)=y''(b)$.

$$a_0=y_0''; \ a_{N-1}+b_{N-1}h_N=y_N''.$$

Первое соотношение в условии позволяет получить следующее уравнение:

$$\frac{6}{h_1}\Big(\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{m_1+2m_0}{3}\Big)=y_0''\Rightarrow-\frac{2m_1}{h_1}-\frac{4m_0}{h_1}=y_0''-\frac{6(y_1-y_0)}{h_1^2}\Rightarrow$$
$$2m_0+m_1=\frac{3}{h_1}(y_1-y_0)-\frac{h_1}{2}y_0''.$$

Второе соотношение позволяет получить второе недостающее уравнение:

$$\frac{6}{h_N}\Big(\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}-\frac{m_N+2m_{N-1}}{3}\Big)+\frac{12}{h_N}\Big(\frac{m_N+m_{N-1}}{2}-\frac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\Big)=y_N'',$$
$$-2m_N-4m_{N-1}+6m_N+6m_{N-1}=h_N\Big(y_N''-\frac{6(y_N-y_{N-1})}{h_N^2}+\frac{12(y_N-y_{N-1})}{h_N^2}\Big),$$
$$2m_N+m_{N-1}=\frac{h_Ny_N''}{2}+\frac{3(y_N-y_{N-1})}{h_N}.$$

Окончательно получают следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \dfrac{3}{h_1}(y_1 - y_0) - \dfrac{h_1}{2}y_0'', \\ \mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = 3\Big(\lambda_i \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} + \mu_i \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\Big), \ i = \overline{1, N-1}, \\ 2m_N + m_{N-1} = \dfrac{h_N y_N''}{2} + \dfrac{3(y_N - y_{N-1})}{h_N}. \end{cases}$$

3 краевое условие (периодичность):

$$\begin{array}{lll} y_N = y_0, & y_{N+1} = y_1, & \ldots, \\ m_N = m_0, & m_{N+1} = m_1, & \ldots, \\ h_1 = h_{N+1}, & h_2 = h_{N+2}, & \ldots, \\ \mu_{N+1} = \mu_1 = \dfrac{h_1}{h_{N+2} + h_1}. & & \end{array}$$

Эти условия добавляют два уравнения к системе уравнений (1):
$\mu_1 m_N + 2m_1 + \lambda_1 m_2 = g_1,$
$\mu_N m_{N-1} + 2m_N + \lambda_N m_1 = g_N.$
4 краевое условие:
$S'''(x_1 - 0) = S'''(x_1 + 0)\,,\ S'''(x_{N-1} - 0) = S'''(x_{N-1} + 0)\,.$

Сначала рассматривается первое соотношение.
$S'''(x_1 - 0) = S'''(x_1 + 0) \Longrightarrow b_0 = b_1$
или
$$\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{m_1 + m_0}{2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1}\right) = \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{m_2 + m_1}{2} - \frac{y_2 - y_1}{h_2}\right).$$
Уравнение умножают на $2h_1h_2$ и получают
$$\frac{h_2}{h_1}(m_1 + m_0) - \frac{h_1}{h_2}(m_2 + m_1) = -\frac{y_2 - y_1}{h_2} \cdot 2\frac{h_1}{h_2} + \frac{y_1 - y_0}{h_1} \cdot 2\frac{h_2}{h_1},$$
$$m_0 + (1 - (\frac{h_1}{h_2})^2)m_1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 m_2 = 2\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right).$$
Если обозначить $h_1/h_2 = \gamma_1$, то уравнение примет вид:
$$m_0 + (1 - \gamma_1^2)m_1 - \gamma_1^2 m_2 = 2\frac{y_1 - y_0}{h_1} - 2\gamma_1^2\frac{y_2 - y_1}{h_2}.$$
Добавляют к полученному уравнению первое уравнение из системы (1):
$$\mu_1 m_0 + 2m_1 + \lambda_1 m_2 = 3\Big(\lambda_1\frac{y_2 - y_1}{h_2} + \mu_1\frac{y_1 - y_0}{h_1}\Big).$$
Тогда имеют систему двух уравнений относительно трех неизвестных m_0, m_1, m_2:
$$m_0 + (1 - \gamma_1^2)m_1 - \gamma_1^2 m_2 = 2\frac{y_1 - y_0}{h_1} - 2\gamma_1^2\frac{y_2 - y_1}{h_2},$$
$$\mu_1 m_0 + 2m_1 + \lambda_1 m_2 = 3\Big(\lambda_1\frac{y_2 - y_1}{h_2} + \mu_1\frac{y_1 - y_0}{h_1}\Big).$$

Умножают первое уравнение на μ_1 и вычитают из второго:
$(2-\mu_1+\mu_1\gamma_1^2)m_1+(\lambda_1+\mu_1\gamma_1^2)m_2=(3\lambda_1+2\mu_1\gamma_1^2)\dfrac{y_2-y_1}{h_2}+\mu_1\dfrac{y_1-y_0}{h_1}$.
Если учесть, что
1)$\mu_1\gamma_1^2=\dfrac{h_1^2}{(h_1+h_2)h_2}=\dfrac{h_1}{h_1+h_2}\dfrac{h_1}{h_2}=\lambda_1\gamma_1$,
2)$\lambda_1+\mu_1\gamma_1^2=\lambda_1+\lambda_1\gamma_1=\lambda_1(1+\gamma_1)=\dfrac{h_1}{h_1+h_2}\left(1+\dfrac{h_1}{h_2}\right)=\dfrac{h_1}{h_2}=\gamma_1$,
3)$2-\mu_1+\mu_1\gamma_1^2=1+\lambda_1+\lambda_1\gamma_1=1+\gamma_1$,
4)$3\lambda_1+2\mu_1\gamma_1^2=3\lambda_1+2\lambda_1\gamma_1=\lambda_1(3+2\gamma_1)$,
то $b_0=b_1$ примет вид:
$(1+\gamma_1)m_1+\gamma_1 m_2=\lambda_1(3+2\gamma_1)\dfrac{y_2-y_1}{h_2}+\mu_1\dfrac{y_1-y_0}{h_1}$.

Аналогичные преобразования осуществляются для второго соотношения 4-го краевого условия.

$S'''(x_{N-1}-0)=S'''(x_{N-1}+0)\Longrightarrow b_{N-2}=b_{N-1}$.
$\dfrac{1}{h_{N-1}^2}\left(\dfrac{m_{N-1}+m_{N-2}}{2}-\dfrac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}\right)=\dfrac{1}{h_N^2}\left(\dfrac{m_N+m_{N-1}}{2}-\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right)$.
Вводят обозначение $\dfrac{h_N}{h_{N-1}}=\gamma_N$. Тогда

$$\begin{cases} \gamma_N^2 m_{N-2}-(1-\gamma_N^2)m_{N-1}-m_N=2\left(\gamma_N^2\dfrac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}-\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right), \\ (N-1)-\text{ое уравнение системы имеет вид:} \\ \mu_{N-1}m_{N-2}+2m_{N-1}+\lambda_{N-1}m_N=3\left(\lambda_{N-1}\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}+\mu_{N-1}\dfrac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}\right). \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на λ_{N-1} и складывая со вторым, получают:
$(\mu_{N-1}+\lambda_{N-1}\gamma_N^2)m_{N-2}+(2-(1-\gamma_N^2)\lambda_{N-1})m_{N-1}=$
$=\lambda_{N-1}\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}+(3\mu_{N-1}+2\mu_{N-1}\gamma_N)\dfrac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}$.

С учетом того, что
$\mu_{N-1}+\lambda_{N-1}\dfrac{h_N^2}{h_{N-1}^2}=\dfrac{h_N}{h_N+h_{N-1}}+\dfrac{h_N^2}{(h_N+h_{N-1})h_{N-1}}=\mu_{N-1}(1+\gamma_N)=\gamma_N$,
$2-\lambda_{N-1}+\lambda_{N-1}\gamma_N^2=1+\mu_{N-1}+\mu_{N-1}\gamma_N=1+\mu_{N-1}(1+\gamma_N)=1+\gamma_N$,
имеют
$\gamma_N m_{N-2}+(1+\gamma_N)m_{N-1}=\mu_{N-1}(3+2\gamma_N)\dfrac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}}+\lambda_{N-1}\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}$.

Итак, в случае краевых условий 4-ого типа имеют:

$$(1+\gamma_1)\,m_1+\gamma_1 m_2=\lambda_1\,(3+2\gamma_1)\,\frac{y_2-y_1}{h_2}+\mu_1\frac{y_1-y_0}{h_1};$$

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = 3\left(\lambda_i \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} + \mu_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right),\ i=\overline{2, N-2};$$

$$\gamma_N m_{N-2} + (1+\gamma_N)\, m_{N-1} = \mu_{N-1}\,(3+2\gamma_N)\,\frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-1}} + \lambda_{N-1}\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N}.$$

4. Построение кубического сплайна через моменты

Моментами называются $S''(x_i) = M_i;\ i=\overline{0,N};$

$$S(x) = y_i + c_i(x-x_i) + a_i\frac{(x-x_i)^2}{2} + b_i\frac{(x-x_i)^3}{6} \text{ на } [x_i,\ x_{i+1}],$$
$$S'(x) = c_i + a_i(x-x_i) + b_i\frac{(x-x_i)^2}{2},$$
$$S''(x) = a_i + b_i(x-x_i),$$
$$S'''(x) = b_i,$$
$$S''(x_i) = a_i = M_i;\ S''(x_{i+1}) = a_i + b_i h_{i+1} \Rightarrow b_i = \frac{M_{i+1}-M_i}{h_{i+1}}.$$

Отсюда: $S(x_{i+1}) = y_i + c_i h_{i+1} + M_i\frac{h_{i+1}^2}{2} + (M_{i+1}-M_i)\frac{h_{i+1}^2}{6} = y_{i+1}$, тогда $c_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - M_i\frac{h_{i+1}}{2} - (M_{i+1}-M_i)\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(2M_i + M_{i+1})$.

Из условия непрерывности первой производной для $S(x)$ в узлах x_i, имеют:
$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$,
$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_{i-1}+M_i) + M_{i-1}h_i + \frac{M_i - M_{i-1}}{2}h_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(2M_i + M_{i+1})$,
$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{1}{3}M_i(h_i + h_{i+1}) + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$,

$$\lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right),\ i=\overline{1, N-1}. \tag{2}$$

Для получения замкнутой системы для определения моментов нужно добавить краевые условия к системе (2):
1 краевое условие: $S'(a) = A;\ S'(b) = B$.

$$\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{6}(2M_0 + M_1) = A \Longrightarrow \boxed{2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1} - A\right).}$$
$$\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{h_N}{6}(2M_{N-1} + M_N) + M_{N-1}h_N + \frac{h_N}{2}(M_N - M_{N-1}) = B,$$

$\dfrac{h_N}{6}M_{N-1}+\dfrac{h_N}{3}M_N=B-\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{M_{N-1}+2M_N=\dfrac{6}{h_N}\left(B-\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right).}$

Неизвестные моменты находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} 2M_0+M_1=\dfrac{6}{h_1}\Big(\dfrac{y_1-y_0}{h_1}-A\Big), \\ \lambda_i M_{i-1}+2M_i+\mu_i M_{i+1}=\dfrac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right),\ i=\overline{1,N-1}, \\ M_{N-1}+2M_N=\dfrac{6}{h_N}\left(B-\dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_N}\right). \end{cases}$$

2 краевое условие: $S''(a)=A;\ S''(b)=B$, тогда $M_0=A;\ M_N=B$.

3 краевое условие:

$\boxed{M_0=M_N;\ M_{N+1}=M_1;\ h_1=h_{N+1}.}$

4 краевое условие: $S'''(x_1+0)=S'''\,(x_1-0)$, $S'''(x_{N-1}-0)=S'''(x_{N-1}+0)$.

Рассматривают первое равенство $S'''(x_1+0)=S'''\,(x_1-0)$.

$b_0=b_1\Longrightarrow \dfrac{M_1-M_0}{h_1}=\dfrac{M_2-M_1}{h_2}\Rightarrow -M_0+M_1=\dfrac{h_1}{h_2}(M_2-M_1)$.

Обозначают $\gamma_1=\dfrac{h_1}{h_2}$ и рассматривают систему из двух уравнений.

$$\begin{cases} M_0-(1+\gamma_1)M_1+\gamma_1 M_2=0, \\ \text{1-ое уравнение системы имеет вид:} \\ \lambda_1 M_0+2M_1+\mu_1 M_2=\dfrac{6}{h_1+h_2}\left(\dfrac{y_2-y_1}{h_2}-\dfrac{y_1-y_0}{h_1}\right). \end{cases}$$

Умножают первое уравнение на λ_1и вычитают из второго уравнения:

$M_1(2+\lambda_1(1+\gamma_1))+(\mu_1-\lambda_1\gamma_1)M_2=\dfrac{6}{h_1+h_2}\left(\dfrac{y_2-y_1}{h_2}-\dfrac{y_1-y_0}{h_1}\right)$.

Так как

$2+\lambda_1(1+\gamma_1)=2+\dfrac{h_1}{h_2}=2+\gamma_1$,

$\mu_i-\lambda_1\gamma_1=\dfrac{h_2}{h_1+h_2}-\dfrac{h_1}{h_1+h_2}\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{h_2-h_1}{h_2}$, то

$$\boxed{(2+\gamma_1)\,M_1+\dfrac{h_2-h_1}{h_2}M_2=\dfrac{6}{h_1+h_2}\left(\dfrac{y_2-y_1}{h_2}-\dfrac{y_1-y_0}{h_1}\right).}$$

Далее рассматривают второе условие $S'''(x_{N-1}+0)=S'''(x_{N-1}-0)$.

$b_{N-2} = b_{N-1} \Longrightarrow \dfrac{M_{N-1} - M_{N-2}}{h_{N-1}} = \dfrac{M_N - M_{N-1}}{h_N}.$

Обозначают $\gamma_N = \dfrac{h_N}{h_{N-1}}$ и рассматривают систему из двух уравнений.

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad -\gamma_N M_{N-2} + (1+\gamma_N) M_{N-1} - M_N = 0, \\ \text{(N-1)-ое уравнение системы имеет вид:} \\ \lambda_{N-1} M_{N-2} + 2M_{N-1} + \mu_{N-1} M_N = \dfrac{6}{h_{N-1}+h_N} \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \dfrac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}}. \end{array}\right.$$

Умножают первое уравнение на μ_{N-1}и складывают со вторым уравнением системы:

$(\lambda_{N-1} - \mu_{N-1}\gamma_N) M_{N-2} + (2 + \mu_{N-1}(1+\gamma_N)) M_{N-1} =$

$= \dfrac{6}{h_{N-1} + h_N} \left(\dfrac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \dfrac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} \right).$

Так как

$\lambda_{N-1} - \mu_{N-1}\gamma_N = \dfrac{h_{N-1}}{h_{N-1} + h_N} - \dfrac{h_N}{h_N + h_{N-1}} \dfrac{h_N}{h_{N-1}} = \dfrac{h_{N-1} - h_N}{h_{N-1}},$

$2 + \mu_{N-1}(1+\gamma_N) = 2 + \dfrac{h_N}{h_{N-1}} = 2 + \gamma_N,$

то

$\dfrac{h_{N-1} - h_N}{h_{N-1}} M_{N-2} + (2+\gamma_N) M_{N-1} = \dfrac{6}{h_{N-1}+h_N} \left(\dfrac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \dfrac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} \right).$

Для нахождения моментов необходимо решить систему:

$$\left\{\begin{array}{l} (2+\gamma_1) M_1 + \dfrac{h_2 - h_1}{h_2} M_2 = \dfrac{6}{h_1 + h_2} (\dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1}), \\ \quad \lambda_i M_{i-1} + 2M_i + \mu_i M_{i+1} = \dfrac{6}{h_i + h_{i+1}} (\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}), \ i = \overline{1, N-1}, \\ \dfrac{h_{N-1} - h_N}{h_{N-1}} M_{N-2} + (2+\gamma_N) M_{N-1} = \dfrac{6}{h_{N-1}+h_N} (\dfrac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \dfrac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}}). \end{array}\right.$$

5. Дифференцирование и интегрирование кубического сплайна

1. Если сплайн $S(x)$ определен через наклоны m_i, то вычисление $S'(x)$ не представляет труда, т. к.

$S'(x_i) = m_i;$

$$S'(x) = m_i + \frac{6(x - x_i)}{h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+1} + 2m_i}{3} \right) +$$

$$+ \frac{6(x - x_i)^2}{h_{i+1}^2} \left(\frac{m_{i+1} + m_i}{2} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} \right);$$

$$S''(x)=\frac{6}{h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{m_{i+1}+2m_i}{3}\right)+\frac{12(x-x_i)}{h_{i+1}^2}\left(\frac{m_{i+1}+m_i}{2}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right);$$

$$\int\limits_a^b S(x)dx=\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)dx;$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)dx=\left[y_ix+m_i\frac{(x-x_i)^2}{2}+a_i\frac{(x-x_i)^3}{6}+b_i\frac{(x-x_i)^4}{24}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}=$$

$$=y_ih_{i+1}+\frac{m_ih_i^2}{2}+h_i^2\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{m_{i+1}+2m_i}{3}\right)+\frac{h_i^2}{2}\left(\frac{m_{i+1}+m_i}{2}-\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\right)=$$

$$=h_{i+1}\frac{y_{i+1}+y_i}{2}+h_{i+1}^2\frac{m_i-m_{i+1}}{12}.$$

2. Если сплайн $S(x)$ определен через наклоны M_i, то

$$S'(x)=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{6}(2M_i+M_{i+1})+M_i(x-x_i)+\frac{M_{i+1}-M_i}{h_{i+1}}\frac{(x-x_i)^2}{2};$$

$$S''(x_i)=M_i;$$

$$S''(x)=M_i+\frac{M_{i+1}-M_i}{h_{i+1}}(x-x_i);$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S(x)dx=y_ih_{i+1}+\frac{h_{i+1}^2}{2}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}}{6}(2M_i+M_{i+1})\right]+\frac{M_ih_{i+1}^3}{6}+$$

$$+\frac{h_{i+1}^3}{24}(M_{i+1}-M_i)=\frac{h_{i+1}}{2}(y_i+y_{i+1})-\frac{h_{i+1}^3}{24}(M_i+M_{i+1}).$$

Варианты заданий

Таблица 3. Построение сплайна через наклоны

I тип кр. усл.	II тип кр. усл.	IV тип кр. усл.	
1	9	17	Задача интерполирования, данные из лаб. раб. 1
2	10	18	Задача интегрирования, данные из лаб. раб. 4
3	11	19	Задача дифференцирования (первая производная), данные из лаб. раб. 1
4	12	20	Задача дифференцирования (вторая производная), данные из лаб. раб. 1

Таблица 4. Построение сплайна через моменты

Первый тип краевых условий	Второй тип краевых условий	Четвертый тип краевых условий	
5	13	21	Задача интерполирования, данные из лаб. раб. 1
6	14	22	Задача интегрирования, данные из лаб. раб. 4
7	15	23	Задача дифференцирования (первая производная), данные из лаб. раб. 1
8	16	24	Задача дифференцирования (вторая производная), данные из лаб. раб. 1

В полях таблиц указан номер варианта.

Тема 6. Численное решение уравнения f(x)=0 методом хорд и касательных

Найти действительные корни уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

с заданной точностью ε, т.е. указать такое x, что $|x^* - x| < \varepsilon$, где * — корень уравнения $f(x) = 0$. Решение этой задачи состоит из двух этапов.

1. Отделение корней. На этом этапе выделяют отрезки $[\alpha_i, \beta_i]$, принадлежащие области определения функции $f(x)$, на каждом из которых расположен один и только один корень уравнения (1), такие корни называются изолированными. Границы каждого отрезка рассматривают как первое приближение искомого корня, α_i - с недостатком, β_i - с избытком. Тогда погрешность такого приближения не превзойдет длины l_i отрезка $[\alpha_i, \beta_i]$.

Для отделения корней уравнения (1) можно воспользоваться первой теоремой Больцано — Коши. Если функция $f(x)$ на отрезке α_i, β_i удовлетворяет условиям этой теоремы, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения (1). Корень будет заведомо единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри отрезка $[\alpha_i, \beta_i]$. Таким образом, участки, отделяющие корни уравнения (1) следует искать на интервалах знакопостоянства производной функции $f(x)$.

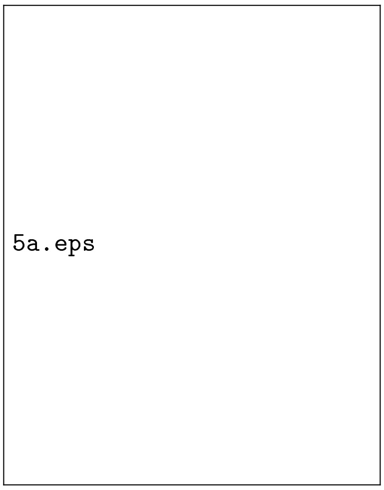
Другой простой способ выделения корней состоит в преобразовании уравнения (1) к виду $\Phi() = \Psi(x)$, где функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = \Phi(x)$ и $\Psi()$, искомые корни получают как абсциссы точек пересечения этих графиков.

2. Нахождение отделенного корня с любой наперед заданной степенью точности ε.

Искомый корень уравнения (1) отделен и лежит на отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$, на котором функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема, причем производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют каждая свой знак.

Возможны четыре комбинации знаков первой и второй производных, которые определяют четыре типа расположения кривой $y = f(x)$:

а) $f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0$ — функция вогнутая и возрастает;
б) $f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0$ — функция выпуклая и возрастает;
в) $f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0$ — функция вогнутая и убывает;
г) $f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0$ — функция выпуклая и убывает.



Рассмотрение четырех случаев необходимо для определения того, с какого конца отрезка $[\alpha_i, \beta_i]$ возможно применение метода касательных, а именно, с конца, в котором значение функции и ее второй производной имеет одинаковый знак. Тогда противоположный конец отрезка используется для применения метода хорд. Расчетные формулы методов имеют вид:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} - \frac{f(\bar{x}_{n-1})}{f'(\bar{x}_{n-1})},$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(\bar{x}_{n-1} - x_{n-1})}{f(\bar{x}_{n-1}) - f(x_{n-1})},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots$ – приближения по методу касательных,
$x_0, x_1, \ldots$ – приближения по методу хорд.

Вычисления по формулам прекращают, когда $|x_n - \bar{x}_n)| < \varepsilon$.

Таблица 5.

№	Вид уравнения ***f(x)=0***	искомый корень
1	$0 = 1.2x^2 - sin(10x)$	все положительные корни
2	$0 = 2\sqrt{x} - \cos(\pi x/2)$	все корни
3	$0 = 2^x - 2x^2 - 1$	положительные корни
4	$0 = 2\ln x - 1/x$	все корни
5	$0 = 2\lg x - x/2 + 1$	положительные корни
6	$0 = \lg x - 7/(2x + 6)$	все корни
7	$0 = x\lg x - 1/2$	все корни
8	$0 = \lg(3x-1) + exp(2x-1)$	все корни
9	$0 = exp(-x) - 2(x-1)^2$	все корни
10	$0 = 2 - x\exp(x)$	все корни
11	$0 = 1/x - \pi\cos(\pi x)$	все положительные корни
12	$0 = sec(x) - x^2 - 1$	все положительные корни
13	$0 = ctg(1,05x) - x^2$	все положительные корни
14	$0 = 2x - \lg(x) - 7$	все положительные корни
15	$0 = exp(-x) + x^2 - 2$	отрицательные корни
16	$0 = 0,5x^2 - \cos(2x)$	все корни
17	$0 = \ln(0,5x) - 0,5\cos(x)$	все корни
18	$0 = \ln(2x) - exp(2x)$	все корни
19	$0 = \exp(-x) + x^3 - 3$	все положительные корни
20	$0 = 2x^2 - \cos(2x)$	все корни
21	$0 = x^2 - 20\sin x$	все корни
22	$0 = x^2 - \sin 5x$	все корни
23	$0 = \ln x + (x+1)^3$	все корни
24	$0 = 2,2x - 2^x$	наименьший корень

Список литературы

1. Бахвалов Н.С.Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Наука,1987.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х томах. -М.: Физматгиз, 1962.
3. Волков Е.А. Численные методы. -М.: Наука,1987.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. -М.: Наука, 1966.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978.
7. Колобов А.Г.
8. Крылов В.И.,Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2-х т. -М.: Наука,1976-1977.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М.: Наука,1989.

Учебное издание

Татьяна Владимировна Пак

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

В авторской редакции
Технический редактор Л.М. Гурова
Компьютерный набор и верстка Л. А. Молчановой

Подписано в печать ..06
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. ,. Уч.-изд. л. 0,.
Тираж экз.

Издательство Дальневосточного университета
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27.
Отпечатано в лаборатории
кафедры компьютерных наук ИМКН ДВГУ
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к. 132.