Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Дальневосточный государственный университет

**Л.А. МОЛЧАНОВА**

# ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические указания для студентов
математических специальностей

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2006

ББК 22.161
М75

Рецензенты:
А.Г. Колобов, к.ф.-м.н. (ИМКН ДВГУ, РАН);
М.А Князева, к.т.н. (ИАПУ ДВО РАН).

***Молчанова Л.А.***
М75 **Элементы вариационного исчисления.** Учебно-методическое пособие. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2006. - 20с.

Методические указания разработаны для студентов Института математики и компьютерных наук ДВГУ. В них дается теоретический материал, позволяющий студентам использовать средства математического пакета Maple в своей практической деятельности при выполнении заданий по спецкурсу Пакеты прикладных программ и математических дисциплин, связанных с решением уравнения Эйлера.

Для студентов математических специальностей.

$\text{М}\frac{1702050000}{180(03)-2006}$ ББК 22.161

# Введение

Вариационное исчисление является разделом математики, в котором изучаются методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов.

Говорят, что задан функционал, если каждой функции (кривой или поверхности) из некоторого класса поставлено в соответствии определенное число.

Таким образом, если каждой функции $y = y(x)$, принадлежащей некоторому функциональному класса $A$, ставится в соответствии числовое значение $J$, то говорят, что $J$ есть функционал, определенный на классе $A$, и пишут

$$J = J[y(x)],\ y \in A.$$

Основной задачей вариационного исчисления является разыскание наибольших и наименьших значений функционалов от линий и поверхностей, выражаемых некоторыми определенными интегралами.

Если функционал для некоторой линии или поверхности имеет значение не меньшее (не большее), чем для всех близких к ней линий или поверхностей, то говорят, что для этой линии или поверхности функционал имеет экстремум. В вариационном исчислении доказывается, что линия $y = y(x)$ или поверхность $z = z(x, y)$, дающая экстремум некоторому функционалу, должна удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению. Удовлетворение этому уравнению представляет собой необходимое условие экстремума функционала.

**Основная лемма.** *Если для каждой непрерывной функции* $\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0,$$

*где функция* $f(x)$*непрерывна на* $[x_0, x_1]$, *то*

$$f(x) \equiv 0$$

*на том же отрезке.*

Замечание. Утверждение леммы не изменится, если на функцию $\eta(x)$ наложить следующие ограничения: $\eta(x_0) =$, $\eta(x_1) = 0$; $\eta(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $p$.

## Простейшая вариационная задача. Метод Эйлера

Рассмотрим простейший функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{1}$$

где $F$ - заданная функция трех аргументов. Предполагается, что она непрерывна вместе с производными второго порядка в некоторой области $B$ плоскости $(x, y)$ и при любых значениях аргумента $y'$.

Значения функции $y(x)$ на концах промежутка интегрирования заданы:

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1. \tag{2}$$

**Определение.** Говорят, что функционал $J$ достигает *относительного экстремума* для кривой $y(x)$, лежащей в области $B$, принадлежащей классу $C^{(1)}$ и удовлетворяющей условию (2), если величина этого функционала для $y(x)$ не меньше (не больше) его величины для любых других кривых класса $C^{(1)}$.

Выведем необходимые условия, которым должна подчиняться функция $y(x)$ для того, чтобы функционал $J$ имел экстремум. Задача решается методом Эйлера. Наряду с функций $y(x)$ образуют новую функцию сравнения $\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, где $\varepsilon$ - малый численный параметр, а $\eta(x)$ - любая функция, удовлетворяющая условиям (2).

Составим разность

$$J[\bar{y}(x)] - J[y(x)] = J[y(x) + \varepsilon\eta(x)] - J[y(x)].$$

Эта разность есть функция от $\varepsilon$, и она стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Разложим эту функцию в ряд Тейлора

$$J[y(x) + \varepsilon\eta(x)] - J[y(x)] = \Big[\frac{dJ[y(x) + \varepsilon\eta(x)]}{d\varepsilon}\Big]|_{\varepsilon=0}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{3}$$

Для того чтобы функционал $J$ достигал экстремума при $y = y(x)$ необходимо, чтобы разность (3) имела определенный (постоянный) знак. Поэтому необходимое условие экстремума будет

$$\Big[\frac{dJ[y(x) + \varepsilon\eta(x)]}{d\varepsilon}\Big]|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{4}$$

Реализуем условие (4)

$$\Big[\frac{dJ[y(x) + \varepsilon\eta(x)]}{d\varepsilon}\Big]|_{\varepsilon=0} = \Big[\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta'(x))dx\Big]|_{\varepsilon=0} =$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\Big[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\Big]dx = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\eta|_{x=x_0}^{x=x_1}}_{=0} + \int_{x_0}^{x_1}\Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\Big]\eta dx = 0. \tag{5}$$

В силу основной леммы можно утверждать, что функция $y = y(x)$, дающая экстремум интегралу (1), должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{6}$$

Если вдоль исследуемой линии $y = y(x)$ производная $\partial^2 F/\partial y'^2 \neq 0$, то функция $y = y(x)$ имеет вторую производную $y''$ и уравнение (6) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Уравнение (6) было дано Л. Эйлером и называется *уравнением Эйлера* данной задачи. Уравнение (7) представляет собой уравнение второго порядка, и его общий интеграл содержит две произвольные постоянные, которые определяются из двух условий (2).

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются *экстремалями*. Таким образом, экстремаль - эта та кривая, на которой *может* достигаться экстремум функционала (1). Так как уравнение Эйлера дополняется не начальными, а граничными условиями, то теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения здесь неприменима. Иными словами, экстремаль не обязательно существует, а если существует, то не обязательно единственна. Все зависит от вида уравнения Эйлера и разрешимости системы уравнений для граничных условий (2).

Уравнение (6) дает необходимое, но, вообще говоря, недостаточное условие экстремума. Для того чтобы выяснить, есть экстремум или нет, нужно исследовать знак разности (3).

Если условия (2) не заданы, то обратимся к общему выражению вариации функционала (1)

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y|_{x=x_0}^{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\delta y dx \, (\delta y = \varepsilon\eta).$$

Равенство нулю первой вариации приводит к равенству

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y|_{x=x_0}^{x=x_1} = 0. \tag{8}$$

Так как на свободном конце $\eta$ может быть произвольным, то из (8) следует

$$\frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=x_0} = 0, \; \frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=x_1} = 0. \tag{9}$$

Решая уравнение Эйлера, получают $y = y(x, C_1, C_2)$, а затем из (9) находят $y = y(x)$. Предельные условия (9) называются обычно *естественными граничными условиями.*

Если функция $F$ содержит производные искомой функции выше первого порядка

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})dx, \tag{10}$$

то уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

Это есть дифференциальное уравнение порядка $2n$. Его общий интеграл содержит $2n$ произвольных постоянных и необходимо иметь еще $2n$ предельных условий. В простейшем случае эти условия сводятся к заданию функции и ее производных до порядка $(n-1)$ на концах промежутка.

Если рассматривается функционал, зависящий от нескольких функциональных аргументов

$$J[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')dx,$$

причем

$$y_i(x_0) = y_{i,0},\ y_i(x_1) = y_{i,1},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

то система уравнений Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{11}$$

## Метод Ритца

В настоящее время широкое развитие получили иные методы подхода к решению задач на экстремум - методы, которые обходят применение дифференциальных уравнений. В основе этих методов лежит идея построить искомую функцию, дающую экстремум функционала, при помощи некоторого предельного процесса, исходя непосредственно из вида того интеграла, экстремум которого ищется.

Основная идея метода Ритца заключается в следующем. Пусть поставлена вариационная задача для функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx \to min, \tag{12}$$

Предполагается, что $y(x){\in}C^{(1)}$ и функция $F$ непрерывна по всем аргументам.

Для решения поставленной задачи задается полная последовательность линейно независимых функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots,$$

которые выбирают так, чтобы

$$\varphi_k(x) \in C^{(1)},\ (k = 0, 1, 2, \cdots),$$
$$\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0,\ (k = 1, 2, \cdots),$$
$$\varphi_0(a) = y_a,\ \varphi_0(b) = y_b.$$

Решение $y(x)$ представляется в виде

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\varphi_n(x),\ C_0 = 1.$$

Вначале ищется экстремум для функции

$$y_N = \sum_{n=0}^{N} C_n\varphi_n(x),\ C_0 = 1,$$

где $N$ - фиксированное число. Ясно, что $y_N(x){\in}C^{(1)}$, $y_N(a){=}y_a$, $y_N(b){=}y_b$. Выбирают коэффициенты $C_n$ так, чтобы функция $y_N(x)$ доставляла минимум функционалу $J$, то есть

$$J[y_N(x)] = \int_a^b F(x, \sum_{n=0}^{N} C_n\varphi_n(x), \sum_{n=0}^{N} C_n\varphi_n'(x))dx \to min.$$

В интеграле все функции заданы. Выполнив интегрирование, получают вполне определенную функцию $\Phi(C_1, C_2, \cdots, C_N)$. Коэффициенты $C_i$ надо выбрать так, чтобы функция $\Phi$ принимала минимальное значение. Необходимым условием экстремума функции $\Phi$ будет

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C_n} = 0,\ n = 1, 2, \cdots, N. \quad (13)$$

Система уравнений (13) - это система нелинейных уравнений относительно неизвестных $C_1, C_2, \cdots, C_N$. Решив ее, находят коэффициенты $C_n = C_n^N (n = 1, 2, \cdots, N)$, которые определяют решение экстремальной задачи $y_N(x)$. Беря разные $N$, строят минимизирующую последовательность $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_N(x)$. Если эта последовательность сходится к некоторой предельной функции, то она является решением исходной задачи: $y(x) = \lim\limits_{N\to\infty} y_N(x)$.

Решение задачи существенно упрощается, когда $F$ - квадратичная функция переменных $y$ и $y'$. В этом случае приходится решать систему линейных алгебраических уравнений.

Чаще всего в качестве базисных функций берутся системы функций

$$\varphi_k(x) = x^{k-1}(x-a)(x-b),\ k = 1, 2, 3, \cdots$$

или

$$\varphi_k(x) = \sin[\tfrac{k\pi(x-a)}{b-a}],\ k = 1, 2, 3, \cdots$$

## Литература

1. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. - СПб.: Питер, 2001.

2. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. -СПб.: Питер, 2004.

3. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. М.: Наука, 1984.

4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал, 2000.

## Задания

**1.** Для следующих функционалов найти экстремали, построить их графики и исследовать на выполнение достаточных условий экстремума:

1. $J[y] = \int\limits_{-1}^{1} (y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2)dx$; $y(-1) = 3$; $y(1) = 1$;

2. $J[y] = \int\limits_{-1}^{1} (y'^2 - 4y^2 + 2xy - x^2)dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 4$;

3. $J[y] = \int\limits_{-1}^{1} (y'^2 + 4y^2 + 4x^2y + x\cos x)dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 0.5$;

4. $J[y] = \int\limits_{0}^{2} (y'^2 - 4y'\sin 2x - x^2)dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = -1$;

5. $J[y] = \int\limits_{1}^{3} (y'^2 - y'\ln x + 2x)dx$; $y(1) = 2$; $y(3) = -1$;

6. $J[y] = \int\limits_{0.5}^{1.5} (y' + y'^2\sin 2x - cos2x)dx$; $y(0.5) = 1$; $y(1.5) = 2$;

7. $J[y] = \int\limits_{1}^{2} (y' + xy'^2 - x^2y')dx$; $y(1) = 2$; $y(2) = -1$;

8. $J[y] = \int\limits_{0}^{2} (y' + y'^2 + x^2y'^2)dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = -2$;

9. $J[y] = \int\limits_{2}^{4} (y'^2 + \frac{2y'}{1-x^2} + e^{3x})dx$; $y(2) = -1$; $y(4) = 2$;

10. $J[y] = \int\limits_{-1}^{1} (y'^2 + 2y'e^x\sin x - e^x\cos x)dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 3$.

11. $J[y] = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 3$.

12. $J[y] = \int\limits_0^2 (y'^2 + 2yy' - 16y^2)dx$; $y(0) = 0$; $y(2) = 0$.

13. $J[y] = \int\limits_0^2 (xy' + y'^2)dx$; $y(0) = 1$; $y(2) = 0$.

14. $J[y] = \int\limits_{-1}^1 \frac{1+y^2}{y'^2}dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 3$.

15. $J[y] = \int\limits_{-1}^1 (y^2 + y'^2 - 2y\sin x)dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 3$.

16. $J[y] = \int\limits_{-1}^1 (16y^2 - y''^2 + x^2)dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 3$.

18. $J[y] = \int\limits_{-1}^1 \frac{y'^2}{x^3}dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 3$.

19. $J[y] = \int\limits_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x)dx$; $y(0) = 1/3$; $y(1) = e^2/3$.

20. $J[y] = \int\limits_{-1}^1 (y^2 - y'^2 - 2y\sin x)dx$; $y(-1) = 2$; $y(1) = 3$.

**2.** Для следующих функционалов найти экстремали и построить их графики:

1. $J[y,z] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx; \begin{cases} y(0)=1; & y(\pi/2) = 1; \\ z(0)=0; & z(\pi/2) = -1; \end{cases}$

2. $J[y,z] = \int_0^2 (2y'z' + y^2 - z^2 + 2ze^x)dx; \begin{cases} y(0)=1; & y(2) = -1; \\ z(0)=-2; & z(2) = 1; \end{cases}$

3. $J[y,z] = \int_0^2 (2y'z' - y^2 + z^2 + 2y\sin x)dx; \begin{cases} y(0)=1; & y(2) = -1; \\ z(0)=-2; & z(2) = 1; \end{cases}$

4. $J[y,z] = \int_{-1}^1 ((y+z)^2 - y'^2 - z'^2 + 2xz)dx; \begin{cases} y(-1)=2; & y(1) = 0; \\ z(-1)=0; & z(1) = 2; \end{cases}$

5. $J[y,z] = \int_0^2 ((y-z)^2 + y'^2 - z'^2 + 2z\cos x)dx; \begin{cases} y(0)=0; & y(1) = 1; \\ z(0)=1; & z(1) = 0; \end{cases}$

6. $J[y,z] = \int_0^2 (y^2 + 4yz + z^2 - y'^2 - z'^2 + ze^{3x})dx; \begin{cases} y(0)=1; & y(2) = -1; \\ z(0)=-2; & z(2) = 1. \end{cases}$

7. $J[y,z] = \int_{-2}^2 (2y'z' + y^2 + z^2 + 2ye^{-x})dx; \begin{cases} y(-2)=1; & y(2) = 3; \\ z(-2)=-2; & z(2) = 1; \end{cases}$

8. $J[y,z] = \int_{-2}^2 (y^2 + z^2 - 2y'z' + 2ze^{-x})dx; \begin{cases} y(-2)=0; & y(2) = 3; \\ z(-2)=2; & z(2) = 1; \end{cases}$

9. $J[y,z]=\int_{-1}^{2}(2y'z'+y^2-z^2+2z\sin x)dx;\begin{cases} y(-1)=2; & y(2)=0; \\ z(-1)=0; & z(2)=2; \end{cases}$

10. $J[y,z]=\int_{0}^{2}((y+z)^2-y'^2-z'^2+2ye^{2x})dx;\begin{cases} y(0)=1; & y(2)=-1; \\ z(0)=-2; & z(2)=1. \end{cases}$

**3.** Для следующих функционалов найти экстремали и построить их графики:

1. $J[y]=\int_{0}^{1}(y''^2-2y'^2+y^2-2ye^{x})dx;\begin{cases} y(0)=2; & y'(0)=1; \\ y(1)=0; & y'(1)=-1; \end{cases}$

2. $J[y]=\int_{-1}^{1}(y''^2+4y'y''+y'^2+2ye^{-x})dx;\begin{cases} y(-1)=1; & y'(-1)=-1; \\ y(1)=2; & y'(1)=1; \end{cases}$

3. $J[y]=\int_{0}^{2}(y''^2-2y'^2+2y^2+2ye^{x})dx;\begin{cases} y(0)=1; & y'(0)=0; \\ y(2)=4; & y'(2)=-1; \end{cases}$

4. $J[y]=\int_{0}^{2}(y''^2-y'^2+2ye^{-x})dx;\begin{cases} y(0)=1; & y'(0)=0; \\ y(2)=4; & y'(2)=-1; \end{cases}$

5. $J[y]=\int_{0}^{1}(y''^2-y'^2+2ye^{x})dx;\begin{cases} y(0)=2; & y'(0)=1; \\ y(1)=0; & y'(1)=-1; \end{cases}$

6. $J[y]=\int_{-1}^{1}(y''^2-y^2+2y\cos x)dx;\begin{cases} y(-1)=1; & y'(-1)=-1; \\ y(1)=2; & y'(1)=1; \end{cases}$

7. $J[y]=\int_{0}^{2}(y''^2-4y'y''+y'^2+4ye^{-x})dx;\begin{cases} y(0)=1; & y'(0)=0; \\ y(2)=4; & y'(2)=-1; \end{cases}$

8. $J[y]=\int_{-1}^{1}(y''^2-2y'^2+y^2+2y\sin x)dx;\begin{cases} y(-1)=0; & y'(-1)=-1; \\ y(1)=2; & y'(1)=1; \end{cases}$

9. $J[y]=\int_{0}^{1}(y''^2-y'^2+4yy'+2ye^{-x})dx;\begin{cases} y(0)=3; & y'(0)=0; \\ y(1)=1; & y'(1)=1; \end{cases}$

10. $J[y]=\int_{0}^{1}(y''^2-y'^2-4ye^{-x})dx;\begin{cases} y(0)=2; & y'(0)=1; \\ y(1)=0; & y'(1)=-1. \end{cases}$

**4.** Решить примеры 1 методом Ритца. Полученные приближенные решения сравнить с точными решениями этих примеров.

## Примеры решения типовых задач в системе Maple

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$J[y]=\int_{-1}^{1}(x^2+y^2+{y'}^2)dx;\ y(-1)=1.$$

Исследовать найденную экстремаль на достаточные условия и построить ее график.

Рассмотреть два варианта граничных условий на правом конце:
1) $y(1) = 2$
2) граничное условие не задано.

Алгоритм реализация: составляется уравнение Эйлера в виде (7), решается при граничных условиях (заданных или естественном), строятся графики и исследуется выполнение достаточного условия экстремума - проверяется знак второй производной $F_{y'y'}$.

Решение. Подключение пакета VariationalCalculus

```
>restart:with(VariationalCalculus);
```

определение подинтегральной функции функционала

```
>f:=x^2+y(x)^2+diff(y(x),x)^2;
```

$$f := x^2 + y(x)^2 + (\frac{d}{dx}y(x))^2$$

получение уравнения Эйлера с помощью процедуры EulerLagrange

```
>EulerLagrange(f,x,y(x));
```

$$\{2y(x) - 2(\frac{d^2}{dx^2}y(x))\}$$

решение уравнения с заданными граничными условиями

```
>res1:=dsolve({op(%)=0,y(-1)=1,y(1)=2},y(x));
> assign(res1):y:=evalf(y(x));
```

$$res1 := y(x) = \frac{e(e^2-2)e^{(-x)}}{-1+e^4} + \frac{e(2e^2-1)e^x}{-1+e^4}$$

$$y := 0.273311173e^{(-1.x)} + 0.6987702374e^x$$

определение подинтегральной функции

```
>F:=(x,yn,yn1)->x^2+yn^2+yn1^2;
```

$$F := (x, yn, yn1) \to x^2 + yn^2 + yn1^2$$

вычисление производных функции F:
$F_y, F_{yy'}, F_{xy'}, F_{y'y'}$ для уравнения Эйлера

```
>dfdy:=diff(F(x,yn,yn1),yn);dfdy1:=diff(F(x,yn,yn1),yn1);
```

$$dfdy := 2yn$$
$$dfdy1 := 2yn1$$

```
>d3:=diff(dfdy1,x);d4:=diff(dfdy1,yn);d5:=diff(dfdy1,yn1);
```

d3:=0
d4:=0
d5:=2

составление уравнения Эйлера

```
>eq:=dfdy-d3-d4*yn1-d5*yn2=0;
```

eq:=2yn-2yn2=0

```
>eq:=simplify(lhs(eq/2))=0;
```

q:=yn-yn2=0

```
>eq:=subs(yn=yn(x),yn2=diff(yn(x),x$2),lhs(eq))=0;
```

$$eq := yn(x) - (\frac{d^2}{dx^2}yn(x)) = 0$$

задание естественного граничного условия на правом конце

```
>bound2:=subs(yn1=D(yn)(1),dfdy1)=0;
```

$$bound2 := 2D(yn)(1) = 0$$

решение уравнения Эйлера

```
>res:=dsolve({eq,yn(-1)=1} union{bound2},yn(x));
```

$$res := yn(x) = \frac{e^3 e^{(-x)}}{e^4+1} + \frac{ee^x}{e^4+1}$$

```
>assign(res):yn:=evalf(yn(x));
```

$$yn := 0.3612626842e^{(-1.x)} + 0.04889158769e^x$$

построение графиков первого и второго вариантов задачи

```
>py:=plot(y,x=-1..1,title=primer 1",
>legend="accuracy solve",color=black):
> pyn:=plot(yn,x=-1..1,legend="natural condition",
"color=black,thickness=2):
>plots[display]({py,pyn});
```

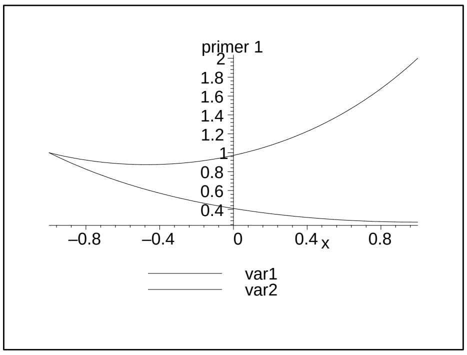


Рис. 1. График экстремали примера 1

<u>Пример 2</u>. Найти экстремали функционала

$$J[y,z] = \int_{-2}^{2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx;$$

$$y(-2) = 1, y(2) = 0; z(-2) = 0, z(2) = 2.$$

Построить графики этих экстремалей.

Решение. Подключение пакета

```
>restart:with(VariationalCalculus);
```

определение подинтегральной функции

```
>F:=diff(y(x),x)^2+diff(z(x),x)^2+2*y(x)*z(x);
```

$$F := (\frac{d}{dx}y(x))^2 + (\frac{d}{dx}z(x))^2 + 2y(x)z(x)$$

получение уравнения Эйлера

```
>EulerLagrange(F,x,[y(x),z(x)]);
>el:=simplify(op(1,%)/2)=0:e2:=simplify(op(2,%%)/2)=0:
```

$$\{-(\frac{d}{dx}y(x))^2-(\frac{d}{dx}z(x))^2+2y(x)z(x)=K_1,$$

$$2z(x)-2(\frac{d^2}{dx^2}y(x)), 2y(x)-2(\frac{d^2}{dx^2}z(x))\}$$

$$e1 := z(x) - (\frac{d^2}{dx^2}y(x)) = 0$$

$$e2 := y(x) - 2(\frac{d^2}{dx^2}z(x)) = 0$$

решение уравнения с заданными граничными условиями

```
>res:=dsolve({e1,e2,y(-2)=1,y(2)=0,z(-2)=0,z(2)=2},{y(x),z(x)});
```

$$res1 := \{z(x) = -\frac{1}{2}\frac{e^2(-2e^4 + (e^4)^2 + 1 - e^8}{e^8 - 1}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{e^2(e^4 - 2)e^{(-x)}}{e^8 - 1} + \frac{3}{4}\frac{\sin(x)}{\sin(2)} - \frac{1}{4}\frac{cos(2)\cos(x)}{\sin(2)^2 - 1},$$

$$y(x)=\frac{1}{2}\frac{e^2(e^4-2)e^{(-x)}}{e^8 - 1}-\frac{1}{2}\frac{e^2(-2e^4+(e^4)^2+1-e^8}{e^8 - 1}-\frac{3}{4}\frac{\sin(x)}{\sin(2)}+\frac{1}{4}\frac{cos(2)\cos(x)}{\sin(2)^2-1}\}$$

```
>assign(res):y:=evalf(y(x));z:=evalf(z(x));
```

$y := 0.0652107650e^{(-1.x)} + 0.13414e^x - 0.0824\sin(x) + 0.60074\cos(x)$

$z := 0.0652107650e^{(-1.x)} + 0.13414e^x + 0.0824\sin(x) - 0.60074\cos(x)$

построение графиков найденных экстремалей

```
>py:=plot(y,x=-2..2,title="primer 2",
legend="y(x)",color=black,linestyle=4):
>pz:=plot(z,x=-2..2,legend="z(x)",color=black):
>plots[display]({py,pz});
```

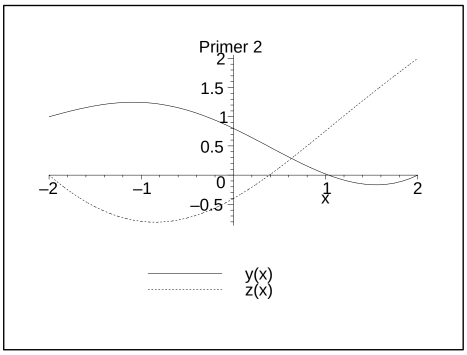


Рис. 2. Графики экстремалей примера 2

Пример 3. Найти экстремаль функционала

$$J[y,z]=\int_{-1}^{2}(y''^2-2y'^2+4yy'+y^2-2y\sin x)dx;$$

$$y(-1)=1; y'(-1)=-1; y(1)=2; y'(1)=-1.$$

Построить график.

Решение. Начало сеанса

```
>restart:
```

определение подинтегральной функции

```
>F:=y2^2-2*y1^2+4*y*y1+y^2-2*y/sin(x);
```

$$F := y2^2 - 2y1^2 + 4y\,y1 + y^2 - dfrac2ysin(x)$$

вычисление частных производных

```
> dFy:=diff(F,y);
```

$$dFy := 4y1 + 2y - \frac{2}{sin(x)}$$

```
>dFy:=subs(y=y(x),y1=diff(y(x),x),y2=diff(y(x),x$2),dFy);
```

$$dFy := 4(\frac{d}{dx}y(x)) + 2y(x) - \frac{2}{sin(x)}$$

```
>dFy1:=diff(F,y1);
```

$$dFy1 := -4y1 + 4y$$

```
>dFy1:=subs(y=y(x),y1=diff(y(x),x),y2=diff(y(x),x$2),dFy1);
```

$$dFy1 := -4(\frac{d}{dx}y(x)) + 4y(x)$$

```
>d3:=diff(dFy1,x);
```

$$d3 := -4(\frac{d^2}{dx^2}y(x)) + 4(\frac{d}{dx}y(x))$$

```
>dFy2:=diff(F,y2);
```

$$dFy2 := 2y2$$

```
>dFy2:=subs(y=y(x),y1=diff(y(x),x),y2=diff(y(x),x$2),dFy2);
```

$$dFy2 := 2(\frac{d^2}{dx^2}y(x))$$

```
>d4:=diff(dFy2,x$2);
```

$$d4 := 2(\frac{d^4}{dx^4}y(x))$$

составление уравнения Эйлера

```
>eq:=dFy-d3+d4;
```

$$eq := 2y(x) - \frac{2}{sin(x)} + 4(\frac{d^2}{dx^2}y(x)) + 2(\frac{d^4}{dx^4}y(x))$$

решение уравнения с заданными граничными условиями:

```
>res:=dsolve({eq,y(-1)=1,y(1)=2,D(y)(-1)=-1,D(y)(1)=-1},y(x)):
> assign(res):y:=simplify(evalf(y(x)));
```

$$y := -0.3811981052\sin(x) - 0.1250000000\sin(x)\,x^2+$$
$$+1.713764698\cos(x)\,x + 1.424852554\cos(x) + 0.8677053540\sin(x)\,x$$

построение графика

```
>py:=plot(y,x=-1..1,title="primer 3",
legend="y(x)",color=black):
>plots[display](py);
```

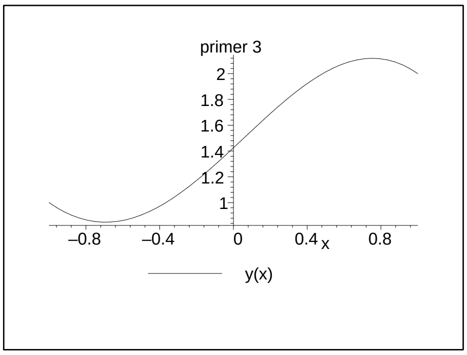


Рис. 3. График экстремали примера 3

Пример 4. Методом Ритца найти экстремаль функционала

$$J[y] = \int_{-1}^{1}(x^2 + y^2 + y'^2)dx;\; y(-1) = 1\, y(1) = 2;$$

сравнить полученное приближенное решение с точным решением из примера 1; построить их графики.

Решение. Выбираем базисные функции и определяем аппроксимирующую функцию. Рассматриваются два варианта базисных функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям, - система полиномов и система синусов:

```
> restart: #построение базисных функций
```

```
>phi0:=x->y1+(y2-y1)*(x-x1)/(x2-x1);
>phi:=(x,n)->sin(n*Pi*(x-x1)/(x2-x1));
>Us:=proc(x,N)option operator,arrow: local n:
>phi0(x)+sum(a[n]*phi(x,n),'n'=1..N):
>end proc:
```

$$\phi 0 := x \to y1 + \frac{(y2 - y1)\,(x - x1)}{x2 - x1}$$

$$\phi := (x,\, n) \to \sin(\frac{n\,\pi\,(x - x1)}{x2 - x1})$$

$$Us := (x,\, N) \to \mathrm{local}\ n;\ \phi 0(x) + (\sum_{'n'=1}^{N} a_n\,\phi(x,\, n))$$

```
>Up:=proc(x,N)option operator,arrow: local n:
>phi0(x)+(x-x1)*(x-x2)*sum(a[n]*x^n,'n'=0..N):
>end proc:
```

$$Up := (x,\, N) \to \mathrm{local}\ n;\ \phi 0(x) + (x - x1)\,(x - x2)\,(\sum_{'n'=0}^{N} a_n\,x^n)$$

разработка процедуры для составления и решения системы уравнений метода Ритца

```
>Ritz:=proc(F,u,i0,N,a)
>local Fu,eqns,v,eq,res: global x1,x2:
>Fu:=simplify(int(subs(y(x)=u,F),x=x1..x2)):
>eqns:={}:v:={}
>for i from i0 to N do
>v:=v union {a[i]}
>eq[i]:=diff(Fu,a[i])=0:
>eqns:=eqns union {eq[i]}:
>od:
>res:=solve(eqns,v):
>assign(res):
>end proc:
```

определение подинтегральной функции

```
>F:=x^2+y(x)^2+diff(y(x),x)^2;
```

$$F := x^2 + y(x)^2 + (\tfrac{d}{dx}\,y(x))^2$$

задание граничных точек

```
>x1:=-1:x2:=1:y1:=1:y2:=2:
```

задание числа базисных функций и решение задачи с использованием синусов

```
>N:=3;c1:='cross':c2:='circle':c3:='box':
```

$$N:=3$$

```
>for j from 1 to N do
>a:=array(1..j):u:=Us(x,j):
>Ritz(F,u,1,j,a):
>pU_||j:=
>plot(Us(x,j),x=-1..1,color=black,style=point,
>symbol=c||j,title="Metod Pitcha",
>legend=cat("N=",convert(j,string))):
>end do:
>z:=(x)->0.2733*exp(-1.0*x)+0.69877*exp(1.0*x);
```

$$z := x \to 0.2733\, e^{(-1.0\, x)} + 0.69877\, e^{(1.0\, x)}$$

```
>pz:=plot(z(x),x=-1..1,legend="solve",color=black):
>Us(x,1);Us(x,2);Us(x,3);
```

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{2} - \frac{24 \sin(\frac{\pi\,(x+1)}{2})}{\pi\,(\pi^2+4)}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{2} - \frac{24 \sin(\frac{\pi\,(x+1)}{2})}{\pi\,(\pi^2+4)} + \frac{\sin(\pi\,(x+1))}{\pi\,(1+\pi^2)}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{2} - \frac{24 \sin(\frac{\pi\,(x+1)}{2})}{\pi\,(\pi^2+4)} + \frac{\sin(\pi\,(x+1))}{\pi\,(1+\pi^2)} - \frac{8 \sin(\frac{3\,\pi\,(x+1)}{2})}{\pi\,(9\,\pi^2+4)}$$

```
>plots[display]({pUs_1,pz});
```

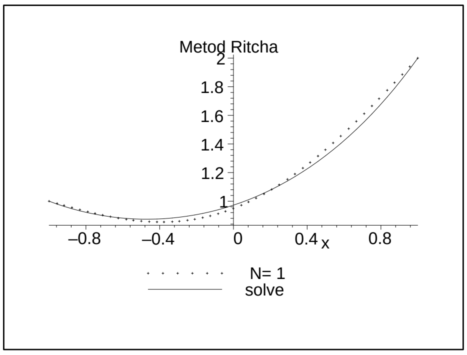


Рис. 4. График экстремалей при использовании синусов

решение задачи с помощью полиномиальной аппроксимации

```
>N:=2:c1:='cross':c2:='circle':c0:='diamond':
```

$$N := 2$$

```
>for j from 0 to N do
>a:=array(0..j):u:=Up(x,j):
>Ritz(F,u,0,j,a):
>pUp_||j:=
>plot(Up(x,j),x=-1..1,color=black,style=point,symbol=c||j,
>legend=cat(Metod Ritcha N= ",convert(j,string))):"
>end do:
>Up(x,0);Up(x,1);Up(x,2);
```

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + \frac{777\,(x+1)\,(x-1)}{1472}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + (x+1)\,(x-1)\,(\frac{777}{1472} + \frac{7\,x}{92})$$

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + (x+1)\,(x-1)\,(\frac{777}{1472} + \frac{7}{92}\,x + \frac{63}{1472}\,x^2)$$

```
>plots[display]({pUp_0,pz});
```

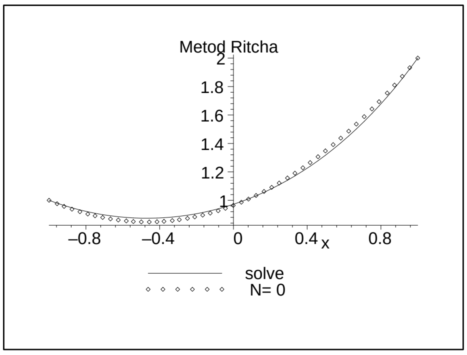


Рис. 5. График экстремалей при использовании полиномов

Учебное издание

*Лилия Александровна Молчанова*

**ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Методические указания для студентов
математических специальностей

В авторской редакции
Технический редактор Л.М. Гурова
Компьютерный набор и верстка автора

Подписано в печать 31.01.06
Формат $60 \times 84$ 1/16. Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд. л. 1,1.
Тираж 25 экз.

Издательство Дальневосточного университета
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27.
Отпечатано в лаборатории
кафедры компьютерных наук ИМКН ДВГУ
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к. 132.