

Задание 1. Подготовить программу для численного решения задачи Коши вида

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

на отрезке $[0, 1]$ методом, указанным ниже. В программе предусмотреть сравнение значений $y(x)$, полученных с шагом h и $\frac{h}{2}$.

1. Методом Рунге-Кутты третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}(k_{1,n} + 3k_{3,n}),$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{1,n}\right), \quad k_{3,n} = f\left(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{2,n}\right).$$

2. Методом Рунге-Кутты четвертой степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_{1,n} + 4k_{3,n} + k_{4,n}),$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{4}, u_n + \frac{h}{4}k_{1,n}\right), \quad k_{3,n} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{2,n}\right),$$

$$k_{4,n} = f(x_{n+1}, u_n + hk_{1,n} - 2hk_{2,n} + 2hk_{3,n}).$$

3. Методом Рунге-Кутты четвертой степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_{1,n} + 2k_{2,n} + 2k_{3,n} + k_{4,n}),$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\right), \quad k_{3,n} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{2,n}\right),$$

$$k_{4,n} = f(x_n + h, u_n + hk_{3,n}).$$

4. Усовершенствованным методом ломаных

$$u_{n+1} = u_n + hk_{2,n},$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\right).$$

5. Неявным методом Рунге-Кутты второй степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(k_{1,n+1} + k_{2,n+1}),$$

$$k_{1,n+1} = f_{n+1}, \quad k_{2,n+1} = f(x_{n+1}, u_{n+1} - hk_{1,n+1}).$$

В качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле Эйлера

$$u_{n+1} = u_n + hf_n.$$

6. Методом Рунге-Кутты третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{9}(2k_{1,n} + 3k_{2,n} + 4k_{3,n}),$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\right), \quad k_{3,n} = f\left(x_n + \frac{h}{4}, u_n + \frac{h}{4}k_{2,n}\right).$$

7. Методом Рунге-Кутты второй степени

$$u_{n+1} = u_n + hk_{2,n},$$
$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\right).$$

8. С помощью неявной формулы трапеций

$$u_{n+1} = u_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{u_n + u_{n+1}}{2}\right).$$

В качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле

$$u_{n+1} = u_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}f_n\right).$$

9. Методом Рунге-Кутты третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_{1,n} + 4k_{2,n} + k_{3,n}),$$
$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\right), \quad k_{3,n} = f\left(x_n + h, u_n - hk_{1,n} + 2hk_{2,n}\right).$$

10. Методом Рунге-Кутты четвертой степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{8}(k_{1,n} + 3k_{2,n} + 3k_{3,n} + k_{4,n}),$$
$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{1,n}\right), \quad k_{3,n} = f\left(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{2,n}\right),$$
$$k_{4,n} = f\left(x_{n+1}, u_n + hk_{1,n} - hk_{2,n} + hk_{3,n}\right).$$

11. Неявным методом Рунге-Кутты третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}(r_{1,n+1} + 3r_{3,n+1}),$$
$$r_{1,n+1} = f_{n+1}, \quad r_{2,n+1} = f\left(x_n + \frac{2h}{3}, u_{n+1} - \frac{h}{3}r_{1,n+1}\right),$$
$$k_{3,n+1} = f\left(x_n + \frac{h}{3}, u_{n+1} - \frac{2h}{3}r_{2,n+1}\right).$$

В качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле Рунге-Кутты третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}(k_{1,n} + 3k_{3,n}),$$
$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{1,n}\right), \quad k_{3,n} = f\left(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{2,n}\right).$$

12. Методом Адамса второй степени

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n).$$

Значение u_1 вычислить по формуле Эйлера-Коши

$$u_2 = u_1 + \frac{h}{2}(f_1 + f(x_2, u_1 + hf_1)).$$

13. Неявным методом Рунге-Кутты

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + hk_{2,n+1}, \\ k_{1,n+1} &= f_{n+1}, \quad k_{2,n+1} = f\left(x_{n+1} - \frac{h}{2}, u_{n+1} - \frac{h}{2}k_{1,n+1}\right). \end{aligned}$$

В качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле Эйлера

$$u_{n+1} = u_n + hk_{1,n}.$$

14. По схеме Куртиса-Хиршфельда второй степени

$$u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}hf_{n+2},$$

в качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле Адамса второй степени

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n).$$

Значение u_1 вычислить по формуле Эйлера-Коши

$$u_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0))).$$

Задание 2. Исследовать теоретически и численно на устойчивость для задачи Коши

$$y' = f(x, y) = -5y, \quad y(0) = 1$$

на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0.1$ заданную схему.

1. Конечно-разностную схему

$$u_{n+1} = u_n + hf_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Конечно-разностную схему

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3. Неявный метод Эйлера

$$u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4. Метод Симпсона

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{2h}{6}(f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

5. Конечно-разностную схему

$$u_n = u_{n-2} + \frac{h}{3}(7f_{n-1} - 2f_{n-2} + f_{n-3}), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

6. Схему Милна

$$u_n = u_{n-2} + 2hf_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

7. Метод трапеций

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

8. Схему дифференцирования назад

$$3u_n + u_{n-2} - 4u_{n-1} = 2hf_n, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

9. Конечно-разностную схему

$$\frac{u_n + 4u_{n-1} - 5u_{n-2}}{2h} = 2f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

10. Конечно-разностную схему

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

11. Конечно-разностную схему

$$\frac{2}{h}(u_n - u_{n-2}) - \frac{3}{h}(u_n - u_{n-1}) = f_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

12. Конечно-разностную схему

$$\frac{u_{n+1} + 4u_n - 5u_{n-1}}{6h} = \frac{2}{3}f_n + \frac{1}{3}f_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

13. Схему Куртиса и Хиршфельда

$$u_{n+3} - \frac{18}{11}u_{n+2} + \frac{9}{11}u_{n+1} - \frac{2}{11}u_n = \frac{6}{11}hf_{n+3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

14. Метод Куртиса и Хиршфельда

$$u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}hf_{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Задание 3.

1. С каким порядком по h дифференциальная задача

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + u &= f(x), \quad x \in [0, 1], \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned}$$

аппроксимируется разностной схемой

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \left(1 + \frac{h^2}{12}\right)y_i = \cos ih,$$

$$y_0 = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih \quad y_n = 1.$$

2. Оценить, с каким порядком дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx} + 2u \cos x = \cos x + \sin 2x, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 0,$$

аппроксимируется разностной схемой

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + a_i \frac{y_{i+1} + y_i}{2} = \frac{1}{2}a_{i+1/2} + \frac{1}{2}(\sin 2x_{i+1/2} + \sin 2x_{i+3/2}),$$

$$y_0 = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih,$$

где $a_i = \cos x_i + \cos x_{i+1}$, а величины с индексами $i + 1/2$ и $i + 3/2$ вычисляются в узлах $x_i + \frac{h}{2}$, $x_{i+1} + \frac{h}{2}$ соответственно.

3. Дана дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx} + a(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = c,$$

и разностная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + (\alpha_1 a(x_n) + \alpha_2 a(x_{n+1})) (\beta_1 y_n + \beta_2 y_{n+1}) = \gamma_1 f(x_n) + \gamma_2 f(x_{n+1}).$$

$$y_0 = c, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih.$$

Как следует выбрать коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$, чтобы получить второй порядок аппроксимации для рассматриваемой дифференциальной задачи?

4. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + au = \cos \pi x, \quad a > 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

на трёхточечном шаблоне построить схему четвертого порядка аппроксимации.

5. Оценить, с каким порядком дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx} + 2u \cos x = \cos x + \sin 2x, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 0,$$

аппроксимируется разностной схемой

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + a_i \frac{y_{i+1} + y_i}{2} = \frac{1}{2} a_i + \frac{1}{2} (\sin 2x_i + \sin 2x_{i+1})$$

$$y_0 = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih,$$

где $a_i = \cos x_i + \cos x_{i+1}$.

6. На нерегулярной сетке методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему первого порядка аппроксимации для задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = a, \quad u(1) = b, \quad q(x) \leq 0,$$

Использовать трёхточечной шаблон.

7. На нерегулярной сетке методом неопределенных коэффициентов построить разностную схему второго порядка аппроксимации для задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = a, \quad u(1) = b, \quad q(x) \leq 0,$$

Использовать трёхточечной шаблон.

8. Оценить, с каким порядком дифференциальная задача

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + u = \cos \pi x, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

аппроксимируется разностной схемой

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) y_i = \cos i\pi h,$$

$$y_0 = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih, \quad y_n = 1.$$

9. Оценить, с каким порядком дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx} + 2u \cos x = \cos x + \sin 2x, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 0,$$

аппроксимируется разностной схемой

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + 2 \cos x_i \frac{y_{i+1} + y_i}{2} = \cos x_{i+1/2} + \sin 2x_{i+1/2},$$

$$y_0 = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih,$$

где $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2} = ih + \frac{h}{2}$.

10. Оценить, с каким порядком дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx} + 2u \cos x = \cos x + \sin 2x, \quad x \in [0, 1],$$
$$u(0) = 0,$$

аппроксимируется разностной схемой

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \cos x_{i+1/2}(y_{i+1} + y_i) = \cos x_{i+1/2} + \sin 2x_{i+1/2},$$
$$y_0 = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih,$$

где $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2} = ih + \frac{h}{2}$.

11. Аппроксимируется ли дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx} + u = x + 1, \quad x \in [0, 1],$$
$$u(0) = 0,$$

разностной схемой

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = ih + 1,$$
$$y_0 = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih,$$

со вторым порядком h ? Если нет, то видоизменить разностную схему так, чтобы она имела второй порядок аппроксимации.

12. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + au = \cos \pi x, \quad a > 0, \quad x \in [0, 1],$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

на трёхточечной шаблоне построить схему десятого порядка аппроксимации.

13. Оценить, с каким порядком дифференциальная задача

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = \cos \pi x, \quad x \in [0, 1],$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

аппроксимируется разностной схемой

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \left(1 + \frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{360} + \frac{h^6}{20160} + \frac{h^8}{1814400}\right)y_i = \left(1 + \frac{h^4}{360} + \frac{h^8}{1814400}\right)\cos \pi x_i,$$
$$y_0 = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih, \quad y_n = 1$$

Задание 4. Решение конечно-разностным методом краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Дано уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x),$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) &= \gamma_0, & \alpha_0^2 + \beta_0^2 &\neq 0, \\ \alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) &= \gamma_1, & \alpha_1^2 + \beta_1^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнения, вид краевых условий, а также точное решение приведены в таблице 1.

Решить краевую задачу с помощью трёхточечной разностной схемы

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (0.1)$$

$$a_0 = c_N = 0, \quad b_i = q_i - a_i - c_i, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

где $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = ih$, $h = \frac{1}{N}$.

Коэффициенты a_i , c_i заданы в таблице 2.

Разностные уравнения при $i = 0$ и $i = N$ получаются при аппроксимации краевых условий.

Если $\beta_0 = 0$, то $c_0 = 0$, а b_0 определяется с помощью α_0 и γ_0 .

Если $\beta_0 \neq 0$, то при аппроксимации левого граничного условия можно воспользоваться соотношением

$$u'(0) \cong \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}.$$

Исключая в разностном уравнении с номером $i = 1$ неизвестное y_0 , получаем новые выражения для b_1 и c_1 , при этом $a_1 = 0$. Таким образом, если $\beta_0 \neq 0$, нулевое уравнение системы нужно только для вычисления y_0 , и это уравнение в системе (0.1) не учитывается.

Аналогична методика рассмотрения правого граничного условия.

Если $\beta_2 \neq 0$, то для аппроксимации правого граничного условия можно воспользоваться соотношением

$$u'(1) \cong \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h}.$$

Далее действуем так же, как и при рассмотрении левого граничного условия.

Исключая из $N - 1$ -ого уравнения y_N , получаем новые выражения для a_{N-1} и b_{N-1} , а $c_{N-1} = 0$. N -ное уравнение системы (0.1) используется для вычисления y_N через y_{N-1} и y_{N-2} .

Таким образом, имеем систему вида (0.1) для $i = l, l+1, \dots, m$, где $l = 0$ или 1 и $m = N$ или $N - 1$, в зависимости от вида граничных условий исходного дифференциального уравнения.

Систему (0.1) решать методом монотонной прогонки.

Ответить на следующие вопросы:

1. Каков порядок аппроксимации разностной схемы?
2. Что можно сказать об устойчивости разностной схемы?
3. Устойчив ли метод прогонки решения трехточечной системы?

Таблица 1. Варианты коэффициентов уравнения и краевых условий.

№	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	α_0	β_0	γ_0	α_1	β_1	γ_1	Точное решение
1	$-x + 1$	-1	$\frac{2}{(x+1)^3}$	1	0	1	1	0	0.5	$\frac{1}{x+1}$
2	$\frac{2}{x-2}$	$x-2$	1	1	0	-0.5	1	0	-1	$\frac{1}{x-2}$
3	$\frac{4x}{x^2+1}$	$-\frac{1}{x^2+1}$	$-\frac{3}{(x^2+1)^2}$	0	1	0	1	0	-0.5	$\frac{1}{x^2+1}$
4	$x+1$	-1	$\frac{x^2+2x+2}{x+1}$	1	0	0	1	0	1.38294	$(x+1)\ln(x+1)$
5	$-(x^2+1)$	$-2x$	$2\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$	1	-2	1	1	0	-0.5	$\frac{1}{x^2+1}$
6	0	$-\frac{2}{(x+1)^2}$	$\frac{9}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$	1	-2	0	0	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-2\sqrt{x+1}$
7	$\frac{3}{2(x+1)}$	0	$\frac{2}{\sqrt{x+1}}$	3	-1	1	0	1	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$
8	$\frac{1}{2(x+1)}$	-1	$-\sqrt{x+1}$	0	1	0.5	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{x+1}$
9	0	$-\frac{3}{(x+1)^2}$	$-\frac{15}{\sqrt{x+1}}$	3	-1	1	0	1	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$
10	$\frac{1}{2(x+1)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	3	-2	2	0	1	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}((x+1)^{\frac{3}{2}}+1)$
11	$-(x+1)^2$	$-\frac{2}{(x+1)^2}$	1	1	-1	2	1	0	0.5	$\frac{1}{x+1}$
12	$\frac{3}{2}(x+1)$	$-(x+1)$	$-2\sqrt{x+1}+x+1$	1	-1	2	0	1	$-2^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1$
13	$x+1$	1	$-\frac{2}{(x+1)^3}$	0	1	1	1	0	0.5	$\frac{x}{x+1}$
14	$-(x+1)$	1	$-\frac{2x^3+4x^2+2x-2}{(x+1)^3}$	1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{x^2}{x+1}$
15	$2\sqrt{x+1}$	$-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	$-\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}+2$	1	0	0	1	0	0.98025	$\sqrt{x+1}\ln(x+1)$
16	0	$\frac{1}{(x+1)^2}$	$\frac{\sqrt{x+2}}{8(x+2)^3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{x+2}}{2(x+2)}$
17	-2	-1	$\frac{2}{(x+1)^3}e^x$	1	0	1	0	1	$\frac{e}{4}$	$\frac{e^x}{x+1}$
18	$\frac{1}{x^2+x+1}$	0	$-2\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$	1	0	0	0	1	1	$\ln(x^2+x+1)$
19	-1	0	$\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$	0	1	1	0	1	$\frac{1}{\cos^2 1}$	$\operatorname{tg} x - 1$
20	$-\sin x$	0	$-\frac{1}{2\sin 2x}$	1	0	0	-1	1	$\cos 1 - \sin 1$	$\sin x - x$
21	$\sqrt{x+1}$	$\frac{1}{4}$	$\sqrt{x+1} + \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$	1	0	4	1	0	$2(\sqrt{2}+1)$	$2\sqrt{x+1}+x+1$
22	$-\frac{1}{\cos x}$	1	$\frac{2-\sin x}{\cos^3 x} - 1$	0	1	0	1	0	$\frac{1}{\cos 1} - 1$	$\frac{1}{\cos x} - 1$

Таблица 2. Варианты разностных схем ($r = \frac{p_i h}{2}$)

№	a_i	c_i
1	$\frac{1}{h^2}(1-r)$	$\frac{1}{h^2}(1+r)$ — классическая трёхточечная схема
2	$\frac{1}{h^2}(1+ r -r)$	$\frac{1}{h^2}(1+ r +r)$ — схема направленных разностей
3	$\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{r^2}{1+ r }-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{r^2}{1+ r }+r\right)$ — схема Самарского
4	$\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{ r ^3}{1+ r +r^2}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{ r ^3}{1+ r +r^2}+r\right)$ — схема Булеева–Тимухина
5	$\frac{1}{h^2}\left(r +e^{- r }-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(r +e^{- r }+r\right)$ — экспоненциальная схема
6	$\frac{1}{h^2}(\operatorname{ch} r - r)$	$\frac{1}{h^2}(\operatorname{ch} r + r)$
7	$\frac{1}{h^2}\left(1+ r \ln(1+ r)-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1+ r \ln(1+ r)+r\right)$ — логарифмическая схема
8	$\frac{1}{h^2}\left(\frac{\operatorname{arctg} r}{r}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\frac{\operatorname{arctg} r}{r}+r\right)$
9	$\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{r^2}{1+ r +\sin^2 r}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{r^2}{1+ r +\sin^2 r}+r\right)$
10	$\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{r^2}{2}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{r^2}{2}+r\right)$
11	$\frac{1}{h^2}\left(1+2 r -\sin 2 r -r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1+2 r -\sin 2 r +r\right)$
12	$\frac{1}{h^2}\left(r +\frac{r^2+1}{ r +1}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(r +\frac{r^2+1}{ r +1}+r\right)$
13	$\frac{1}{h^2}\left(1+ r -\frac{\sin r }{\sin r +1}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1+ r -\frac{\sin r }{\sin r +1}+r\right)$
14	$\frac{1}{h^2}\left(1+r^2-\frac{r^2}{\sin r +1}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1+r^2-\frac{r^2}{\sin r +1}+r\right)$
15	$\frac{1}{h^2}(1+r \sin r - r)$	$\frac{1}{h^2}(1+r \sin r + r)$
16	$\frac{1}{h^2}\left(\operatorname{tg} r +\frac{1}{ r +1}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\operatorname{tg} r +\frac{1}{ r +1}+r\right)$
17	$\frac{1}{h^2}\left(\frac{e^{ r }}{ r +1}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\frac{e^{ r }}{ r +1}+r\right)$
18	$\frac{1}{h^2}\left(2 r +\frac{(2-e^r-e^{-r})^2}{2+e^r+e^{-r}}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(2 r +\frac{(2-e^r-e^{-r})^2}{2+e^r+e^{-r}}+r\right)$
19	$\frac{1}{h^2}(1+ r -\operatorname{th} r -r)$	$\frac{1}{h^2}(1+ r -\operatorname{th} r +r)$
20	$\frac{1}{h^2}\left(r +\frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh} r +1}-r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(r +\frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh} r +1}+r\right)$

Таблица 2. Варианты разностных схем $\left(r = \frac{p_i h}{2}\right)$ (продолжение)

№	a_i	c_i
21	$\frac{1}{h^2} \left(1 + \frac{r^2}{\sin^2 r + r + 1} - r\right)$	$\frac{1}{h^2} \left(1 + \frac{r^2}{\sin^2 r + r + 1} + r\right)$
22	$\frac{1}{h^2} (a^{ r } - r)$	$\frac{1}{h^2} (a^{ r } + r), a > 1$