Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Дальневосточный государственный университет

Л.А. МОЛЧАНОВА

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Методические указания для студентов
математических специальностей

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2006

ББК 32.97
М75

Рецензенты:
А.Г. Колобов, к.ф.-м.н. (ИМКН ДВГУ);
М.А Князева, к.т.н. (ИАПУ ДВО РАН).

Молчанова Л.А.

М75 **Классификация уравнений с двумя независимыми переменными.** Учебно-методическое пособие. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2006. - 16 с.

Методические указания разработаны для студентов Института математики и компьютерных наук ДВГУ. В них дается теоретический материал, позволяющий студентам использовать средства математического пакета Maple в своей практической деятельности при выполнении заданий по Практикуму на ЭВМ и спецкурсу Пакеты прикладных программ.

Для студентов математических специальностей.

М$\frac{2405000000}{180(03)-2006}$ ББК 32.97

Учебное издание

Лилия Александровна Молчанова

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Методические указания для студентов математических специальностей

В авторской редакции

Технический редактор Л.М. Гурова

Компьютерный набор и верстка автора

Подписано в печать 31.01.06

Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 1,1. Уч.-изд. л. 0,9.
Тираж 25 экз.

Издательство Дальневосточного университета
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27.

Отпечатано в лаборатории
кафедры компьютерных наук ИМКН ДВГУ
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к. 132.

Классификация уравнений с двумя независимыми переменными

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты A, B и C суть функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно. Будем предполагать, что A, B и C не обращаются одновременно в нуль. Уравнению (1) соответствует квадратичная форма

$$g = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

определитель которой есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Пусть $\Delta = AC - B^2 > 0 \Rightarrow A \neq 0$. Тогда можно записать

$$g = \frac{1}{A}[(AX+BY)^2 + (AC-B^2)Y^2]. \qquad (2)$$

Форма (2) очевидно, определенная. Следовательно, уравнение принадлежит эллиптическому типу.

Пусть $\Delta = AC - B^2 < 0$. Возможны два случая:

1. $A \neq 0$, тогда имеет место равенство (2), но в зависимости от Y знак g меняется; форма неопределенная. Следовательно, уравнение (1) - гиперболического типа.

2. $A = 0$, тогда запишем g в виде $g = (2BX + CY)Y$. Ясно, что g - неопределенная форма, тип уравнения - гиперболический.

Пусть $\Delta = AC - B^2 = 0$. Тип уравнения - параболический.

Таким образом, окончательно получаем: если $\Delta > 0$, то уравнение эллиптического типа; если $\Delta < 0$, то уравнение гиперболического типа; если $\Delta = 0$, то уравнение параболического типа.

Преобразование уравнений второго порядка с помощью замены переменных

Всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu+G=0, \tag{3}$$

где A, B, C, D, E, F, G - заданные функции от x и y (в частном случае, постоянные).

Попытаемся упростить это уравнение с помощью замены переменных

$$\begin{cases}\xi = & \varphi(x,y);\\ \eta = & \psi(x,y).\end{cases} \tag{4}$$

Здесь ξ, η - новые независимые переменные. Функции φ и ψ, связывающие новые переменные со старыми переменными, будут подобраны позднее. Считаем, что отображение (4) является взаимно однозначным. Сделаем требуемую замену переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2\Big]; \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}+\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2]+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2\Big]; \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}+$$

$$+\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big]. \tag{8}$$

Правые части формул (5)-(8) представляют собой линейные функции относительно частных производных u'_ξ, u'_η, $u''_{\xi\xi}$, $u''_{\eta\eta}$, $u''_{\xi\eta}$. Подставляя u'_x,u'_y,... из этих формул в уравнение (3), мы получим снова *линейное уравнение второго порядка* с неизвестной функцией u и независимыми переменными ξ и η

$$\bar{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\bar{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\Phi(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta})=0, \tag{9}$$

где

$$\bar{A} = A(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2;$$

$$\bar{B} = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\bar{C} = A(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2,$$

а функция Φ линейна относительно u, u'_ξ, u'_η.

Уравнение (9) становится особенно простым, если коэффициенты $\bar{A}$ и $\bar{C}$ окажутся равными нулю. Для того чтобы первоначально заданное уравнение (3) можно было привести к такому простому виду, надо в нем сделать замену переменных (4), подобрав функции φ и ψ так, чтобы они являлись решениями уравнения

$$A(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + 2B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + C(\frac{\partial z}{\partial y})^2 = 0. \tag{10}$$

Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка. Следующая теорема показывает, как связаны его решения с общим решением некоторого обыкновенного уравнения.

Теорема. *Для того чтобы функция $z = f(x, y)$ во всех точках области Ω удовлетворяла уравнению(10), необходимо и достаточно, чтобы семейство $f(x, y) = const$ было общим интегралом уравнения*

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0 \tag{11}$$

в той же области Ω.

Теорема открывает путь для упрощения исходного уравнения (3). Для этого сначала составляем вспомогательное уравнение (11); оно называется *характеристическим уравнением* для данного уравнения (3). Характеристическое уравнение есть *обыкновенное* дифференциальное уравнение первого порядка, но второй степени. Разрешая его относительно производной y', получим два уравнения

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \tag{12}$$

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \tag{13}$$

Если общий интеграл уравнения (12) имеет вид $\varphi(x, y) = const$, то, полагая $\xi = \varphi(x, y)$, мы обращаем в нуль коэффициент при производной $u''_{\xi\xi}$. Если

$\psi(x, y) = const$ является общим интегралом уравнения (13), независимым от интеграла $\varphi(x, y) = const$, то, полагая $\eta = \psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при производной $u''_{\eta\eta}$.

Интегральные кривые характеристического уравнения, то есть все кривые, входящие в семейство $\varphi(x, y) = const$, $\psi(x, y) = const$, называются *характеристиками* заданного дифференциального уравнения (3). В связи с этим рассматриваемый метод упрощения уравнения (3) называется *методом характеристик.*

Уравнение гиперболического типа

Семейство $\varphi(x, y) = const$ и $\psi(x, y) = const$ можно рассматривать, как общие интегралы уравнения (11) - это уравнение распадается на два уравнения (12) и (13). Правые части уравнений (12) и (13) действительны и различны. Следовательно, согласно указанной теореме, функции $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$ являются решениями уравнения в частных производных (10). Функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ линейно независимы (можно доказать, что определитель Вронского отличен от нуля, если $AC - B^2 < 0$). Поэтому, возвращаясь к уравнению (3), мы можем сделать в нем замену переменных по формулам (4). Так как функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют уравнению (11), то в результате этой замены переменных окажется $\bar{A} = 0$ и $\bar{C} = 0$. Следовательно, уравнение (3) преобразуется к виду

$$2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \Phi(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}) = 0,$$

или, после деления на $2\bar{B}$ и переноса в другую часть равенства, к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \bar{\Phi}(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}). \tag{14}$$

Полученное уравнение имеет более простой вид, чем исходное уравнение (3); если мы сможем его решить, то для того, чтобы найти решение исходного уравнения, достаточно вернуться к старым переменным.

Уравнение (14) представляет собой каноническую форму уравнения гиперболического типа. Иногда пользуются другой канонической формой гиперболического типа. Сделаем в уравнение (14) замену переменных по закону $\xi = t + \tau, \eta = t - \tau$, где t и τ - новые переменные. В результате этого преобразования уравнение (14) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} = 4\bar{\Phi}.$$

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad x>0,\quad y>0,$$

и найти его общее решение.

Решение. Определим тип уравнения. Имеем

$$A=x^2,\quad B=0,\quad C=-y^2,\quad \Rightarrow \Delta=AC-B^2=-x^2y^2<0.$$

Следовательно, тип уравнения - гиперболический.
Составим характеристическое уравнение

$$x^2dy^2-y^2dx^2=0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения с разделяющимися переменными

$$xdy-ydx=0,\quad xdy+ydx=0.$$

Отсюда находим

$$xy=C_1,\quad \frac{y}{x}=C_2.$$

Таким образом, прямые $y=C_2x$ и гиперболы $y=C_1/x$ являются характеристиками заданного уравнения.
Введем новые переменные по формулам

$$\xi=xy,\quad \eta=\frac{y}{x}.$$

Используя формулы (6) и (7), найдем $\partial^2 u/\partial x^2$ и $\partial^2 u/\partial y^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя эти значения вторых производных в исходное уравнение, окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \xi>0,\quad \eta>0.$$

Введем теперь новую неизвестную функцию $v(\xi,\eta)=\partial u/\partial\eta$. Будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{v}{2\xi}=0\Rightarrow\frac{\partial v}{v}=\frac{\partial \xi}{2\xi}\Rightarrow \ln|v|=\frac{1}{2}\ln|\xi|+\ln|f(\eta)|,$$

где $f(\eta)$ - произвольная функция η. После потенцирования получим

$$v = f(\eta)\sqrt{\xi}.$$

Далее

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = v(\xi, \eta) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)\sqrt{\xi} \Rightarrow u = \sqrt{\xi}\int f(\eta)d\eta + \psi(\xi),$$

где $\psi(\xi)$ - произвольная функция ξ. Обозначив

$$\varphi(\eta) = \int f(\eta)d\eta,$$

окончательно получим

$$u = \sqrt{\xi}\varphi(\eta) + \psi(\xi),$$

где $\psi(\xi)$ и $\varphi(\eta)$ - произвольные функции ξ и η соответственно.

Возвращаясь к старым переменным x и y, получим

$$u = \sqrt{xy}\varphi(\frac{y}{x}) + \psi(xy).$$

Уравнение параболического типа

В этом случае уравнения (12) и (13) совпадают, и мы получаем один общий интеграл $\varphi(x, y) = const$, определяющий одно семейство характеристик. Тогда можно принять $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ - любая функция, независимая от функции $\varphi(x, y)$, лишь бы она была дифференцируема нужное число раз. Очевидно, при выбранной замене переменных коэффициент $\bar{A}$ в уравнении (9) обращается в нуль, то есть

$$\bar{A} = A(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 = 0.$$

С учетом того, что $AC - B^2 = 0$ или $B = \sqrt{A}\sqrt{C}$, последнее уравнение можно переписать в виде

$$A(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 = (\sqrt{A}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 = 0.$$

Тогда $\bar{B} = 0$ и уравнение (9) принимает вид

$$\bar{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0.$$

После деления на $\bar{C}$, окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \bar{\Phi}(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}). \tag{15}$$

Уравнение (15) называется *канонической формой уравнения параболического типа.* Интересно отметить, что если правая часть уравнения (15) не содержит производной $\partial u/\partial \xi$, то оно становится обыкновенным дифференциальным уравнением, где роль параметра играет ξ.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0,$$

и найти его общее решение.

Решение. Определим тип уравнения. Имеем

$$A = x^2, \quad B = xy, \quad C = y^2, \quad \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = x^2y^2 - x^2y^2 = 0.$$

Следовательно, тип уравнения - параболический.
Составим характеристическое уравнение

$$x^2 dy^2 - 2xydxdy + y^2 dx^2 = 0 \Rightarrow (xdy - ydx)^2 = 0 \Rightarrow xdy - ydx = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим одно семейство характеристик

$$\frac{y}{x} = C.$$

Это семейство прямых. Новые переменные вводим по формулам

$$\xi = \frac{y}{x} \quad \eta = y.$$

Выбор второй функции сделан с учетом того, чтобы она была наиболее простой, но так, чтобы функциональный определитель Остроградского для преобразования переменных был отличен от нуля. Находим теперь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя полученные выражения производных в исходное уравнение, окончательно получим каноническую форму этого уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Полученное уравнение легко интегрируется. Будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\xi) \Rightarrow u = \int f(\xi) d\eta + \varphi(\xi)$$

или

$$u = f(\xi)\eta + \varphi(\xi),$$

где f и φ - произвольные функции.

Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения

$$u = f(\frac{y}{x})y + \varphi(\frac{y}{x}).$$

Уравнение эллиптического типа

В этом случае правые части уравнений (12) и (13) комплексно сопряжены. Пусть $\varphi(x, y)$ - комплексный интеграл уравнения (12), а $\varphi^*(x, y){=}const$ - интеграл уравнения (13), где $\varphi^*(x, y)$ - функция, комплексно сопряженная с функцией $\varphi(x, y)$. Если теперь перейти к комплексным переменным $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi^*(x, y)$, то, согласно общей теории, уравнение (3) приведется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}),$$

то есть точно к такому же виду, как и гиперболическое уравнение. Чтобы остаться в действительной области, сделаем еще одну замену переменных:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \; i = \sqrt{-1},$$

где α и β - новые переменные. Тогда $\xi = \alpha + i\beta$, $\eta = \alpha - i\beta$. При такой замене переменных $\bar{A} = \bar{C}$,$\bar{B} = 0$. Таким образом, уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \theta(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}),$$

которое называется *каноническим видом уравнения эллиптического типа.*

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Определим тип уравнения. Имеем

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 5 \quad \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 5 - 4 = 1 > 0.$$

Следовательно, тип уравнения - эллиптический.
Составим характеристическое уравнение

$$dy^2 + 4dxdy + 5dx^2 = 0.$$

Это уравнение распадается на два следующих уравнения

$$y' = -2 + i, \quad y' = -2 - i.$$

Интегрируя их, найдем два общих интеграла характеристического уравнения

$$y = (-2 + i)x + C_1, \quad y = (-2 - i)x + C_2.$$

Введем обозначения

$$\varphi = y - (-2 + i)x; \quad \varphi^* = y + (2 + i)x,$$

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} = y + 2x, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i} = -x.$$

Согласно общей теории, нужно ввести новые переменные α и β по формулам

$$\xi = \alpha + i\beta = y + 2x - ix, \quad \eta = \alpha - i\beta = y + 2x + ix.$$

Вычисляя производные по формулам (6)-(8), после всех преобразований окончательно получим канонический вид заданного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Литература

1. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. - СПб.: Питер, 2001.

2. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. -СПб.: Питер, 2004.

3. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1977.

4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.

5. Ковтанюк А.Е. Контрольные работы по уравнениям математической физики. Владивосток: Дальнаука, 1999.

6. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. М.: Наука, 1984.

7. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1975.

Задание

1. Привести к каноническому виду и найти общее решение:

1. $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0;$
2. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0;$
3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0;$
4. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y + 4u$
5. $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 5u_x + u_y + 4u = 0$
6. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0;$
7. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0;$
8. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2;$
9. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} = 0;$
10. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0;$
11. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0;$
12. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + cu = 0;$
13. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y = 0;$
14. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u_y = 0;$
15. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y = 0.$

2. Привести к каноническому виду:

1. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$;
2. $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$;
3. $sgn(y)u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$, $x > 0$, $y < 0$;
4. $yu_{xx} + xyu_{yy} = 0$, $x > 0$, $y > 0$;
5. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$, $x < 0$, $y > 0$;
6. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$, $x > 0$, $y > 0$;
7. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$, $x < 0$, $y > 0$;
8. $u_{xx} + yu_{yy} + 0.5u_y = 0$, $y > 0$;
9. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$, $y > 0$;
10. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$, $x > 0$;
11. $u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - cos(x)u_y = 0$;
12. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$;
13. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0$;
14. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$;
15. $yu_{xx} - xu_{yy} = 0$, $x < 0$, $y < 0$.

Примеры решения типовых задач в Maple

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,.$$

Решение. Будем рассматривать уравнение общего вида:

$$a_1u_{xx} + a_2u_{xy} + a_3u_{yy} + a_4u_x + a_5u_y + a_6u + a_7 = 0.$$

Зададим коэффициенты нашего уравнения

```
>restart:with(linalg):
> a:=x^2,0,-y^2,0,0,0,0:assume(x>0,y>0):
```

и само уравнение:

```
>equ:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+
>a[3]*diff(u(x,y),y,y)+a[4]*diff(u(x,y),x)+
>a[5]*diff(u(x,y),y)+a[6]*u(x,y)+a[7]=0;
```

$$equ := x\tilde{}^2\,(\frac{\partial^2}{\partial x\tilde{}^2}\,\mathrm{u}(x\tilde{},\,y\tilde{})) - y\tilde{}^2\,(\frac{\partial^2}{\partial y\tilde{}^2}\,\mathrm{u}(x\tilde{},\,y\tilde{})) = 0$$

Вычисляем матрицу старших коэффициентов и ее определитель:

```
>eq:=lhs(equ): >A:=matrix(2,2,[coeff(eq,diff(u(x,y),x,x)),
```

```
>coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,coeff(eq,diff(u(x,y),x,y))/2,
>coeff(eq,diff(u(x,y),y,y))]);
>Delta:=simplify(det(A));b:=signum(%);
```

$$A := \begin{bmatrix} x^{\sim 2} & 0 \\ 0 & -y^{\sim 2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta := -x^{\sim 2} y^{\sim 2}$$

Определяем тип уравнения и печатаем его:

```
>op(b): eq_type:="ele": if b=-1 then eq_type:='gip':
>elif b=0 then eq_type:="par":
>else b:=1:
>end if:
>print(eq_type,b);
```

gip, -1

Формируем характеристическое уравнение и решаем его:

```
>P:=A[1,1]*z^2-2*A[1,2]*z+A[2,2]:res1:=solve(P=0,z):
>simplify({solve(P,z)}):simplify(%,power):
>res1:=subs(y=y(x),%):

>if b=-1 then
>res2:={seq(dsolve(diff(y(x),x)=res1[i],y(x)),i=1..nops(%))}:
>r:={seq(solve(res2[i],_C1),i=1..nops(res2))}:
>subs(y(x)=y,r):
>itr:={xi=(%[2]),eta=(%[1])}:
>end if:

>if b=1 then mu:=1/select(has,%[1],y):
>{seq(int(expand((diff(y(x),x)+%%[i])*mu),x)=_C1,i=1..nops(%%))}:
>r:={seq(solve(%[i],_C1),i=1..nops(res2))}:
>subs(y(x)=y,r):
>itr:={xi=coeff(%[1],I),eta=%[1]-coeff(%[1],I)*I}:
>end if:

>if b=0 then
>if has(res1[1],_C1)=false then subs(y(x)=y,res1[1]):
>else
>subs(y=y(x),res1[1]):
>es2:=dsolve(diff(y(x),x)=%,y(x)): r:=solve(res2,_C1):
>subs(y(x)=y,r): end if:
>itr:={xi=%,eta=y}:
```

```
>end if:
```

$$\{\xi = \frac{y^{\sim}}{x^{\sim}},\ \eta = y^{\sim}\, x^{\sim}\}$$

Приводим заданное уравнение к канонической форме:

```
>simplify(itr);with(PDEtools):tr:=solve(itr,{x,y}):
>if has(%,RootOf) then tr:=allvalues(%)[1] end if:
>dchange(tr,eq,itr,[eta,xi],simplify)=0;
```

$$-2\,\xi\,(2\,(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\,\mathrm{u}(\eta,\,\xi))\,\eta - (\frac{\partial}{\partial\xi}\,\mathrm{u}(\eta,\,\xi))) = 0$$

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$$

и найти его общее решение.

Решение. Воспользуемся стандартной программой mapde(eq,canom) из пакета PDTools.

```
>restart:a:=1,-2,-3,0,0,0:
```

Зададим уравнение:

```
>equ:=a[1]*diff(u(x,y),x,x)+a[2]*diff(u(x,y),x,y)+
> a[3]*diff(u(x,y),y,y)+
>a[4]*diff(u(x,y),x)+a[5]*diff(u(x,y),y)+a[6]*u(x,y)=0;
```

$$equ := (\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{u}(x,\,y)) - 2\,(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\,\mathrm{u}(x,\,y)) - 3\,(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{u}(x,\,y)) = 0$$

```
>with(PDEtools):p1:=mapde(equ,canom);
```

$$p1 := \sqrt{16}\,(\frac{\partial^2}{\partial\_\xi 2\,\partial\_\xi 1}\,\mathrm{u}(\_\xi 1,\ \_\xi 2))\ \&\mathrm{where}\,\{\_\xi 1 = 3\,x + y,\ \_\xi 2 = \frac{x}{4} - \frac{y}{4}\}$$

```
>op(%);
```

$$\sqrt{16}\,(\frac{\partial^2}{\partial\_\xi 2\,\partial\_\xi 1}\,\mathrm{u}(\_\xi 1,\ \_\xi 2)),\ \{\_\xi 1 = 3\,x + y,\ \_\xi 2 = \frac{x}{4} - \frac{y}{4}\}$$

Найдем общее решение:

```
>pdsolve(%[1]);
```

$$u(\_\xi 1, \_\xi 2) = \_F2(\_\xi 1) + \_F1(\_\xi 2)$$

Вернемся к старым переменным:

```
>sol:=u(x,y)=subs(%%[2],rhs(%));
```

$$sol := u(x,y) = \_F2(3x+y) + \_F1(\tfrac{x}{4} - \tfrac{y}{4})$$

Проверим найденное решение:

```
>simplify(subs(sol,equ)):simplify(lhs(%));
```

$$0$$